



۵۴۸
جزء اثقال

کتاب دوم
علم تعادل قوی

مطابق آخرین پروگرام مصوبه شورای عالی معارف

مخصوص سال ششم متوسطه

تألیف

(حسین هورفر - معلم ریاضی در مدارس متوسطه تهران)

جميع حقوق محفوظ

از نشریات کتابخانه مرکزی - تهران

چاپ اول - شماره - ۱۳۹۹

۱۳۱۱

مطبعة «پروخیم» - تهران

جز اثقال

کتاب دوم

علم تعادل قوی

ب
۵۷۸

مطابق آخرین پرگرام مصوبه شورای عالی معارف
مخصوص سال ششم متوسطه

تألیف

حسین هورفر - معلم ریاضی در مدارس متوسطه تهران

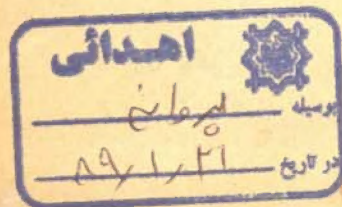
۳۵۰۳۶۵



جميع حقوق محفوظ

و مخصوص بمؤلف است

۱۳۱۰



مطبعة «پروخیم» تهران

کتاب دوم علم تعادل قوی

فصل اول - اصول موضوعه جر اثقال

۱ - **معرفة القوى - علم تعادل قوی -** موضوع معرفة الحركات بحث در حرکات و اشکال مختلفه آنها بود بدون آنکه نظری باسباب ایجاد شان داشته باشیم ، تجسس مسببهای مزبور موضوع **معرفة القوى Dynamique** میباشد و آن در مورد ساختمان ماشینها استعمال میشود .
بعبارة اخرى موضوع معرفة القوى بحث در دو مسئله ذیل است :

۱ - **جسمی تحت طریقه معلومی متحرک است ، تعیین اعمالی که مورث ایجاد حرکت مزبور اند مطلوب است .**
۲ - **جسمی با شرایط اولیه مشخصی تحت تأثیر اعمال معینی مفروض است مقصود بدست آوردن حرکتی است که از اثر اعمال مزبور احداث میگردد .**

بخصوص میتوان معین نمود چه روابطی باید بین آثار وارده بر اجسام برقرار باشد تا نسبت بدستگاه مفروضی بحالت سکون قرار گیرند بعبارة اخرى بحال تعادل باقی بمانند .

وقتی دستگاه ثابت زمین اختیار شود ، تحقیق مزبور موضوع علم **تعادل قوی Statique** است ، چنانچه سکون را نسبت بدستگاهی یکنوع حرکت فرض نماییم تعادل قوی خود نیز مبحثی از معرفة القوى میگردد .

اهمیت عملی علم تعادل قوی باعث آن است که از مبحث معرفة القوى جدا باشد ، بخصوص علم تعادل قوی در موقع خیلی مهمی مورد استعمال پیدا میکند و بوسیله آن میتوان آثاری که مواد معینی در يك ساختمان بر یکدیگر وارد میسازند بوسیله انتخاب مواد و ابعاد آنها خنثی ساخت .
حرکت اجسام بخواص آنها بستگی تام دارد مثلاً بشکل ، بدرجه صیقلی بودن ، تشابه اجزاء ، قابلیت ارتجاع ، مقاومتی که ملاءهای مختلفه در مقابل آنها بمنصه ظهور میرساند و قس علیهذا .

علوم مذکوره فوق کاملاً نمیتواند اوضاع مختلفه حرکت جسمی را تحت محاسبه در آورده و پیش بینی نماید بلکه در اینمورد مجبورند بجای اجسام حقیقی اجسام مجازی دیگری که دارای خواص مختلفه ساده تری میباشد اختیار نمایند ، علمی که در خصوص چنین اجسام گفتگو میکند به **مکانیک استدلالی Mécanique rationnelle** موسوم میباشد .

با وصف آنکه مکانیک استدلالی از موضوع عمل خارج است در بسیاری حالات اوضاع و کیفیاتی را پیش بینی مینماید که بعضی اوقات با تقریب کمی نتایجی از آن عاید میگردد ، ولی برای مصون ماندن از خطا لازم است که نتایج حاصله از آنرا بوسیله تجربه و مشاهده که خود میتواند باعث کشف بعضی آثار فراموش شده بشود تحت امتحان آورد .

بالاخره نباید این نکته را از نظر محو داشت که مکانیک استدلالی اساساً در مورد اوضاع طبیعی و مخصوصاً در تحقیق حرکات سماوی به نتایج حتمی میرسد .

۲ - **نقطه مادی -** جسمی که دارای ابعاد بینهایت کوچک باشد بقسمی که بتوان از آنها صرف نظر نمود به نقطه مادی موسوم است .

۳ - **جرم -** وقتی جسمی تحت تأثیر بعضی اعمال بحرکت در میآید خواص اینحرکت از طرفی مربوط بمسببهای آن و از جهت دیگر بخود

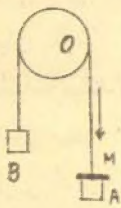
جسم بستگی دارد.

مثلا درب فاصل بین دو اطاق و درب بزرگ عمارت برای آنکه بحرکت در آیند باید تحت تاثیر جد و جهدهای مختلفه قرار گیرند.

و همچنین برای توقف آنها کوشش های مختلفه لازم است در موقع حرکت یا توقف يك نوع مقاومت بمعرض ظهور نمیاورند.

برای آنکه در جاده مسطحی درشکه را در دو حال (یکمرتبه خالی و یکمرتبه پر از بار) که با یکسرعت سیر مینماید متوقف سازیم باید قوای مختلف بکار اندازیم.

مقاومت در حرکت مشخص هر جسم بطور وضوح در ماشین **آتوود** Atwood ملاحظه میشود، دو جسم متعادل A و B که بدو سر ریسمانی که از قرقه متحرکی عبور مینماید بسته شده اند، چنانچه بر یکی از اجسام مثلا بر A جسم M را بیافزائیم مجموعه اجسام A و B و M ورشته و قرقه در جهت سهم بحرکت در می آیند. شتاب در این حرکت از سقوط آزاد جسم M خیلی ضعیفتر است سبب حرکت وزن جسم M است، آثار حرکت به تغییر اجسام تغییر مینماید (س ۱).



بخصوص اگر بجای اجسام A و B اجسامی از این نوع ولی با ابعاد بیشتر قرار دهیم، شتاب مشهود خیلی کمتر میگردد و بعبارة دیگر دستگاه در مقابل حرکت مقاومت زیادی بروز میدهد، قسمی که میتوان گفت برای اجسام متحد النوع مقاومت نسبت مستقیم یا مقدار ماده مشکله جسم دارد. مشاهده کیفیات فوق توجه به نکته ذیل را ایجاب مینماید.

هر نقطه مادی متناظر با عددی است که مشخص مقاومت آن در حرکت میباشد، این عدد مقدار جرم نقطه است.

در جر ائقال جرم هر نقطه مادی ممیز آن است؛ نکته فوق منوط باین شرط است که نقطه مادی مفروض تحت تاثیر هیچک از اعمال فیزیکی یا شیمیائی قرار نگیرد.

همواره جسم را مرکب از توده نقاط مادی ملاحظه میکنیم قسمی که جرم آن مجموع اجرام نقاط مزبور باشد.

همانطور که برای سنجش سایر کمیات واحدی لازم بود برای اندازه گرفتن اجرام نیز واحدی انتخاب میشود بنا بر این واحد جرم عبارت از جرم مخصوصی خواهد بود

بعدها خواهیم دید چگونه بوسیله ترازو میتوان نسبت دو جرم و در نتیجه مقدار يك جرم را معین ساخت. تغییر واحد جرم باعث این میگردد که کمیات اجرام دیگر را که با واحد معینی سنجیده شده در عاملی ضرب نمایند. قبل از آنکه واحد جرم را متذکر شویم لازم است تعاریف دیگری که مربوط بمکانیک نقطه است بیان نماییم.

۴- قوه - مطالعه در حرکت سهمی شکل نسبت بزمین معلوم مینماید که شتاب سقوط بستگی به نوع و سرعت حرکت ندارد. این شتاب دارای امتداد ثابتی است که آنرا قائم مکان میخوانند و آن بطرف تحت متوجه است در مورد حرکت سیارات نسبت بدستگاه ثابتی مرکب از محورهائی که از مرکز خورشید به نقاط ثابتة نسبت بکواکب وصل میگردند نیوتن ثابت کرده است که حرکات مزبور همانحرکاتی میباشد که اگر خورشید بهر يك از سیارات عملی وارد نماید در آنها شتابی تولید میگردد که بسمت مرکز خورشید متوجه بوده و مقدارش برابر خارج قسمت مقدار ثابتی است بر مجذور فاصله هر يك از خورشید. و بسبب همین شتاب است که حرکت انجام میکیرد.

بعلاوه ماشین آتوود کاملاً معلوم مینماید که عمل وارد باجرام مختلف در آنها شتابهای تولید مینماید که به نسبت ترقی اجرامشان نازل مینمایند. از بیانات فوق میتوان تعریف ذیل را برای قوه نمود:

اگر نقطه مادی که بجرم m است دارای حرکتی باشد که شتابش بصورت حاملی مانند γ نموده شده، گویند حرکت این نقطه همان حرکتی است که تحت تأثیر قوه برابر حامل $(F) = (m\gamma)$ در آن ایجاد میگردد.

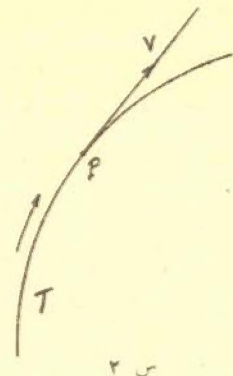
در رسم، حاملهای نمایش قوه با مقیاس معینی که آنرا مقیاس قوه میگویند، نموده میشود.

۵- جبر Inertie - چنانچه قوه بر نقطه مادی وارد نگردد شتابش صفر است. نقطه یا بحال سکون است یا دارای حرکتی مستقیم و متشابه میباشد.

نکته فوق که امروز مقبول عموم است نتیجه مستقیم تعریف قوه میباشد ولی نزد نیوتن قوه منشأ دیگری داشته و بهمین علت است که او مطلب فوق را به اصل معین دیگری موسوم به اصل جبر مبتنی ساخته است.

فرض میکنیم نقطه M بر مسیر T در جهت سهم متحرك باشد و در موقع رسیدن به P قوای که بر آن اثر مینمودند

حذف کنیم، پس از این شتابش صفر خواهد شد یعنی حرکتش مستقیم الخط و متشابه میگردد. بعلاوه تغییرات قوی و بعبارۀ آخری تغییرات شتاب، سرعت را در لحظه حذف قوی بصورت حاملی مانند PV در میاورد بقسمی که حرکت مستقیم الخط مزبور از نقطه P با سرعت (PV) شروع میگردد



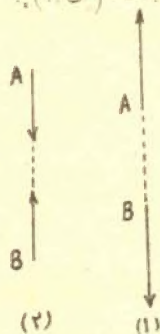
وبخصوص مسیر جدید متحرك بر امتداد مماسی است که از نقطه P بر مسیر قدیم رسم گردد (س ۲).

۶- شرائط اولیه - چنانچه وضع و سرعت متحركی در لحظه مخصوصی مانند t_0 مشخص باشد گویند شرائط اولیه متحرك معین است هرگاه شرائط اولیه متحركی بجرم معین معلوم باشد و بعلاوه بدانیم بر آن قوه مشخصی وارد شده، حرکتش کاملاً معین میگردد.

نکته فوق حکمی است که بوسیله ریاضیات مقدماتی اثبات میشود و آنرا باین عبارت ادا مینمایند: حرکت متحرك مادی بجرم m بوسیله شرائط اولیه آن وقوه که بر آن وارد میگردد کاملاً معین میگردد.

دو اصل موضوع اساسی مکانیک نقطه

۷- تساوی عمل و عکس العمل - اگر نقطه مادی A بر نقطه مادی B اثری وارد نماید این عمل قوه است که بر B در امتداد خط AB وارد میگردد بعلاوه عمل B بر A که به عکس العمل موسوم است نیز قوه متقابل با عمل A بر B است این قوی ممکن است دافعه یا جاذبه باشند (س ۳).



(۲)

چنانچه m_B و m_A جرمهای نقاط A و B فرض شوند این نقاط تحت تأثیر اعمال مشترک خود دارای حرکاتی میشوند که شتابهایشان γ_A و γ_B بوسیله رابطه $m_A \gamma_A = m_B \gamma_B$ یکدیگر بستگی دارد. طرف اول این تساوی مقدار قوه وارده بر A و طرف ثانی مقدار قوه وارده بر B است.

۸- عدم بستگی آثار قوی - اگر قوای

F_1 و F_2 و ... و F_n هر یک جدا گانه بر يك نقطه

مادی اثر نمایند و در آن شتابهای γ_1 و γ_2 و ... و γ_n را ایجاد کنند عمل

متناظر با این قوی در نقطه مفروض شتابی مانند γ ایجاد مینماید که نتیجه شتابهای γ_1 و γ_2 و ... و γ_n است.

اگر m جرم نقطه مزبور اختیار گردد قوه واحدی که قابل ایجاد همان حرکتی باشد که از مجموع قوای مزبور احداث میشود بصورت حامل $(F) = (m\gamma)$ نموده خواهد شد و بنا بر اصل فوق حامل $(m\gamma)$ نتیجه حاملهای $(m\gamma_1)$ و $(m\gamma_2)$ و ... و $(m\gamma_n)$ میباشد. بنا بر این میتوان تساوی هندسی ذیل را نوشت:

$$(F) = (F_1) + (F_2) + \dots + (F_n)$$

و از اینجا چنین نتیجه میشود که میتوان اصل عدم بستگی آثار قوای وارده را بدین عبارت بیان کرد:

چند قوه که متناوباً بر يك نقطه مادی وارد گردند بر آن همان اثر را وارد میسازند که يك قوه برابر نتیجه قوای مزبور احداث مینماید. این قوه واحد را نتیجه قوای مفروض و هریک از آنها را مؤلفه های نتیجه مینامند و بخصوص نتیجه دو قوه که بر يك نقطه اثر نموده باشند قطر متوازی الاضلاعی است که قوای مزبور دو ضلع مجاورش باشند.

۹ - مکانیک ارضی - تعریف قوه همچنین طرح اصول موضوعه مذکور حاوی اشکالی نسبت بدستگاه مقایسه میباشد. شتاب هر حرکت به دستگاهی که حرکت منسوب بدان است بستگی دارد. اگر بخواهیم قوه مسبب حرکت چنین نباشد بایستی برای جمیع حرکات دستگاهی انتخاب کرده آنها را بدان نسبت دهیم این دستگاه همان است که نیوتن حرکات سیارات را بدان نسبت داده و آن مرکب از محورهای است که از حوالی مرکز خورشید (مرکز ثقل منظومه شمسی) عبور مینمایند و امتداد آنها نسبت بکواکب ثابت است. چنین دستگاهی را دستگاه نجومی مینامند. محورهای این دستگاه را بنا بر تعریف محورهای ثابت میخوانند.

بغیر از بعضی حالات استثنائی (مثلاً در تجربه پاندول فوکو) شتاب هر نقطه نسبت بزمین همان است که اگر زمین را دستگاه ثابت فرض نموده و بقوای F_1 و F_2 و ... و F_n وارده بر نقطه قوه دیگری موسوم بوزن نقطه اضافه نمائیم؛ قوه اخیر بصورت حاملی نموده میشود که در امتداد قائم از فوق به تحت ممتد است و مقدار آن برابر mg میباشد، m جرم نقطه و g عددی است که بنقطه بستگی نداشته و بشتاب ثقل موسوم است.

پس از این ما نیز محورهای ثابت را منسوب بزمین اختیار نموده همچنین نقطه که نسبت بزمین ثابت است بعنوان مبدا اختیار مینمائیم.

غالباً اتفاق میافتد که در بعضی مواقع در مورد سکون یا حرکتی در سطح زمین وزن نقطه نسبت بقوای دیگری که بر آن وارد میکردند غیر قابل ملاحظه است. وقتی چنین نباشد یعنی وزن نقطه نیز منظور نظر باشد میگوئیم نقطه وزین مفروض است.

۱۰ - تعادل - نقطه مادی وقتی بحال تعادل است که تحت تأثیر هیچ قوه نباشد و یا عبارت دیگر قوای وارده بدان در آن هیچ شتابی تولید نمایند در اینحالت اولاً اگر نقطه دارای سرعتی است حرکتش همواره مستقیم الخط و متشابه باقی خواهد ماند و در اینحال تعادل آنرا دینامیکی میگویند. ثانیاً - اگر در يك لحظه بیحرکت باشد همواره بهمین حالت باقی خواهد ماند و در اینصورت تعادل نقطه را استاتیکی میگویند و موضوع بحث ما در تعادل استاتیکی است.

۱۱ - نقطه آزاد و نقطه غیر آزاد - وقتی نقطه را آزاد میگویند که بتواند حرکتش را بدون هیچ مانعی در جمیع جهات تحت اثر قوای وارده انجام دهد؛ هرگاه بواسطه موانعی نقطه مادی نتواند حرکت خود را تحت اثر قوای وارده در جمیع جهات انجام دهد آنرا غیر آزاد میگویند. چنین نقطه تحت اثر دو نوع قوه است یکی قوای مستقیم یعنی آنهایی

که مستقیماً بآن وارد میشوند مثلاً وزن نقطه مادی، دیگری قوای ارتباطی که بوسیله موانع ایجاد میگرددند قوای اخیر هرگز قبلاً معین نیستند بلکه بنوع ارتباط و اثر قوای مستقیم بستگی دارند.

۱۲ - تعادل نقطه مادی آزاد - قضیه ۱ - شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه مادی آزادی بحالت تعادل باشد این است که نتیجه قوای وارده بدان برابر صفر باشند.

اولاً شرائط لازم است - چه بمناسبت آنکه $R = m(\gamma)$ و $(\gamma) = 0$ نتیجه میشود $(R) = 0$.

ثانیاً شرائط کافی است - زیرا اگر $(R) = 0$ حاصل میشود $(\gamma) = 0$ یعنی نقطه بحال تعادل است.

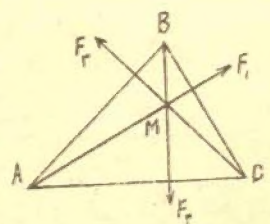
مثال ۱ - قضیه ۲ - شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه تحت تاثیر دو قوه بحال تعادل باشد این است که قوای مزبور متقابل باشند.

مثال ۲ - قضیه ۳ - شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه تحت تاثیر سه قوه بحال تعادل باشد این است که قوای مزبور در يك صفحه واقع بوده علاوه بر يك از آنها خارج زاویه دو قوه دیگر واقع باشند و بالاخره کمیت هر يك متناسب با جیب زاویه دو قوه باشد.

(مسئله ۱۰ تمرینات مبحث حاملها صفحه ۶۱ کتاب اول)

مثال ۳ - مقصود تعیین قوایی است که در امتداد ارتفاعات مثلثی واقع بوده و تشکیل دستگاهی بحال تعادل دهند.

فرض میکنیم قوای F_1 و F_2 و F_3 بنقطه M یعنی محل تلاقی ارتفاعات مثلث وارد شوند پس اولاً بفرض قوای مزبور در يك صفحه اند پس باید هر يك از آنها بطرف راس نظیر یا ضلع مقابل بدان متوجه باشند تا شرط دوم برقرار شود از طرف دیگر بنا بر مثال ۲ لازم است تساویهای ذیل برقرار گردد:



س ۴

$$\frac{F_1}{\sin(F_2, F_3)} = \frac{F_2}{\sin(F_1, F_3)} = \frac{F_3}{\sin(F_1, F_2)}$$

اما $(F_2, F_3) = \pi - A$ و $(F_1, F_3) = \pi - B$ و $(F_1, F_2) = \pi - C$ پس

$$\frac{F_1}{\sin A} = \frac{F_2}{\sin B} = \frac{F_3}{\sin C} \quad \text{و یا} \quad \frac{F_1}{a} = \frac{F_2}{b} = \frac{F_3}{c}$$

یعنی کمیت هر يك از قوای باید متناسب با ضلعی باشد که بر آن عمود است.

۱۳ - استاتیك نقطه غیر آزاد - تماس متحرکی با يك سطح

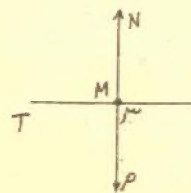
یا يك منحنی - فرض میکنیم نقطه بر سطح یا منحنی ثابتی تحت اثر قوای مفروضی در حرکت باشد. نتیجه این قوای را (R) فرض مینمائیم

(وزن نقطه خود یکی از قوای است) دو حالت تشخیص میدهیم:

اولاً متحرك بقسمی است که نمیتواند از سطح یا منحنی مسیر خود از يك طرف یا از جانب دیگر از آنها جدا گردد مانند آنکه کلوله را بین دو سطح متوازی که فاصله آنها برابر قطر کلوله است بحرکت در آوریم یا آنکه کلوله را داخل لوله که قطرش برابر قطر کلوله باشد بحرکت در آوریم.

ثانیاً متحرك فقط از يك طرف بسطح یا منحنی مسیر خود متکی است (ارتباط یکطرفه) بنا بر این میتواند از طرف دیگر از مسیر خود خارج گردد در اینصورت باید جزء شرائط تعادل قید کنیم که نتیجه (R) لازم است بقسمی ممتد باشد که همواره نقطه متحرك را بر سطح یا منحنی مسیر خود بچسباند.

۱۴ - بعضی نتایج اصول موضوعه ۱ - چنانچه M نقطه وزینی



باشد که بر میز افقی T نهاده شده این نقطه تحت اثر وزن خود P که در امتداد قائم مکان است و قوه دیگری که عکس العمل میز است بحال تعادل خواهد بود، قوه اخیر متقابل با وزن P است و آنرا بصورت حامل N نمایش داده ایم.

س ۵

بنا بر اصل تساوی عمل و عکس العمل نقطه در محل تماس خود μ با میز قوه دریافت مینماید و از طرف دیگر بر همین نقطه عملی وارد میکند که متقابل با قوه مزبور است. این قوه را با همان حامل نمایش p مینمایند و آنرا فشار نقطه M بر میز میخوانند.

حال فرض میکنیم میز بحال آزادی ساقط گردد شتاب آن هنگام سقوط همان شتاب ثقل است، نقطه M که بجرم m است نیز با همین شتاب سقوط مینماید، نتیجه قوایی که بر این نقطه اثر مینمایند تبدیل بقوه قائمی میگردد که کمیتش برابر mg یعنی وزن آن است؛ بنا بر این عمل نقطه μ هنگام سقوط نسبت بنقطه M صفر است.

چنانچه میز در امتداد قائم با شتاب g' که کمتر از g فرض شده سقوط کند نتیجه قوایی که بر M وارد میگردد عبارت از mg' خواهد بود ولی چون یکی از این قوی mg یعنی وزن نقطه m میباشد؛ دیگری که عکس العمل میز است باید بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش برابر $mg - mg'$ باشد بمسئله فشار نقطه M بر میز در اینصورت برابر $mg - mg'$ میگردد و این قوه از فوق بتحت ممتد است.

هنگامیکه میز از تحت بطرف فوق حرکت نماید و شتاب آن g' باشد نتیجه قوایی که بر M اثر مینمایند بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش mg' است بنا بر این باید عکس العمل میز بطرف بالا ممتد بوده و کمیتش مساوی $mg + mg'$ باشد.

بسهولت ممکن است جهت و کمیت نتیجه قوی را بوسیله آسانسور تجربه نمود. باین ترتیب که شخصی در قیانی اتوماتیک بوسیله آسانسور بطرف بالا حرکت نماید، هنگامیکه آسانسور صعود مینماید وزنی که در قیاب نموده میشود زیاد تر از وزن شخص مزبور است، وقتی که حرکت آسانسور متعکس میگردد یعنی شتابش صفر میشود شتاب شخص نیز صفر

گرفته در نتیجه عملی که قیاب به شخص وارد میسازد باید مساوی وزن او باشد در اینصورت قیاب وزن شخص را نشان میدهد، بالاخره موقعیکه حرکت آسانسور مبطئه میگردد یعنی قبل از توقف آسانسور شتاب بطرف پایین ممتد بوده و قیاب وزنی کمتر از وزن شخص نشان خواهد داد. عینا شبیه بهمین اوضاع هنگام پائین آمدن مشاهده میگردد.

هنگامی که شخص از زمین پرش مینماید عضلاتش از خود اثری بر زمین وارد میسازند بقسمی که در آن عکس العملی تولید کنند تا عکس العمل مزبور قابل ایجاد شتابی مانند g که بطرف بالا ممتد است باشد. این عکس العمل دارای مقداری برابر $mg + mg'$ است و بواسطه همین قوه است که شخص پرنده قبل از پریدن بر زمین فشاری وارد میآورد و میتواند بوسیله قیانی معین کرد که این عکس العمل از وزن شخص زیاد تر است و نیز بهمین علت است که پرنده هنگام پریدن از شاخه بشاخ دیگر باعث انعطاف شاخه میشود.

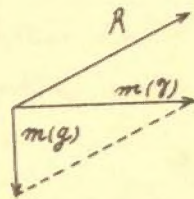
ب- فرض میکنیم مسافری در واگون سوار بوده و حرکت ترن نسبت باو از عقب شخص ممتد باشد. در توقفگاه وزن مسافر بفرض آنکه عمودی نشسته باشد متقابل با عکس العمل نیمکتی است که بر آن قرار گرفته و وقتی ترن حرکت مسرعه خود را خفیف مینماید. اگر (γ) شتاب آن در لحظه باشد، برای آنکه حرکت مسافر نیز دارای شتاب (γ) باشد باید نتیجه قوایی که بر او اثر مینمایند برابر $m\gamma$ شود و ضمناً در جهت مسیر ترن ممتد باشد (m جرم مسافر است).

چون وزن mg از مسافر و عکس العمل R نیمکت را با یکدیگر تالیف نمائیم باید قوه $m\gamma$ حاصل شود. باین ملاحظه میتوان (R) را بدست آورد و معلوم ساخت که عمل مسافر بر نیمکت باید بقسمی باشد که همواره بر

پشتی نیمکت تکیه دهد چنانکه همه میدانیم.

هرگاه مسافری در جهت عکس جهت فوق نشسته باشد فقط تحت عمل فشار پاهای خود بر کف واگون یا قوه متعادل با آن میتواند بحال تعادل باقی ماند.

شدت اوضاع مذکور فوق بستگی بکمیت شتاب γ دارد و بهمین علت است که اگر اتومبیلی ناگهان متوقف گردد مثلا هنگام مصادمه با درخت یا برآمدگی و امثال آن



مسافرین در مقابل عمل R نمیتوانند عکس العملی که متقابل با آن باشد بروز دهند باین

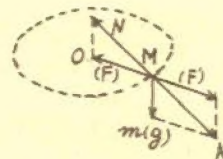
س ۶

جهت بخارج پرتاب میشوند و سرعت این حرکت برابر آخرین سرعت اتومبیل قبل از تصادم است.

ج- فرض میکنیم بر سطح خارجی استوانه دواری با محور قائم قطره مایع M که بجرم m است قرار داشته باشد، استوانه را بحركت متشابه حول محور خود بحركت در میاوریم، چنانچه n عدد دورها را

باشد که استوانه در يك دقیقه میزند مقدار سرعت زاویه آن $\omega = \frac{2\pi n}{t}$ خواهد بود

فرض آنکه ثانیه واحد زمان باشد، شتاب نقطه M دارای مقداری برابر $\omega^2 r$ است بر آنکه شعاع دایره مقطع قائم استو باشد امتداد این شتاب بطرف مرکز O دایره O است که بر آن سیر مینماید (س ۷) قوه $(F) = (m\gamma)$ که باعث اینحرکت



س ۷

میگردد منتجه قوای است که بر M وارد میشوند یعنی منتجه mg و عمل N

از استوانه است. عمل نقطه M بر استوانه بصورت حامل MA متقابل با حامل MN میباشد، این عمل را میتوان بعنوان منتجه وزن قطره و قوه دیگری مانند F' که متقابل با F است دانست، هنگامیکه این عمل کافی باشد برای آنکه اصطكاك قطره را بر استوانه از بین ببرد. قطره از استوانه جدا شده و بر مسیری مماس بر دایره C سیر خواهد کرد همانگونه که سنگ موقع بیرون آمدن از فلاخن حرکت میکند.

برای آنکه کمیت وزن وقوه F مشخص شود فرض میکنیم $n = ۱۰۰۰$ و $r = ۰.۵۰$ مقدار شتاب γ بحسب ثانیه چنین است $\left(\frac{1000\pi}{t}\right)^2 \times 0.5$ این العملی که متقابل با آن باشد بروز دهند باین عدد از $10^5 \times 0.5$ زیاد تر است و حال آنکه g از 10^2 کمتر است جهت بخارج پرتاب میشوند و سرعت این حرکت برابر آخرین سرعت اتومبیل قبل از تصادم است.

شرائط لازم برای تعادل یکدستگاه نقطه مادی

۱۵ - قوای داخلی. قوای خارجی. قوای که بیکدسته نقاط

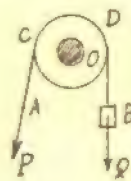
مادی وارد میشوند دو نوع اند: قوای داخلی که عبارتند از عمل و عكس العمل های مشترک نقاط مختلفه دستگاه نسبت بیکدیگر که این قوی بنا بر اصل تساوی عمل و عكس العمل دو بدو متقابل اند. قوای خارجی و آنها عبارتند از قوای که از خارج بر دستگاه وارد میگردد.

امثله - ۱ - فرض میکنیم کیسه پر از سیب بر میزی قرار داشته باشد برای دستگاه مرکب از مجموعه سیب ها و کیسه وزن سیب ها و کیسه همچنین عكس العمل میز در مقابل این فشار عبارت از قوای خارجی هستند اما عكس العمل های سیب ها نسبت بیکدیگر و همچنین عكس العمل های کیسه نسبت به سیب ها یا بالعكس قوای داخلی محسوب میشوند.

برای هر سیب به تنهایی اعمال سیب های دیگر بمنزله قوای خارجی بشمار میآیند و برای دستگاه مرکب از میز و کیسه سیب عكس العمل مشترك میز و کیسه قوای داخلی خواهد بود تنها قوه خارجی در اینمورد

وزن دستگاه مرکب از میز و کیسه و عکس العمل متقابل آن از زمین است
 ۲- زنجیری را فرض میکنیم که بوسیله دو انتهای بندو نقطه ثابت
 A و B آویخته شده باشد. برای تمام زنجیر قوای خارجی عبارتند از عکس
 عملهای نقاط A و B و وزن جمع دانه های زنجیر و عکس عملهای
 مشترك دانه ها نسبت بهم قوای داخلی خواهند بود.
 برای هر دانه به تنهایی قوای خارجی عکس عملهای دو دانه مجاور و
 وزن هر يك از آنها است.

۳- قرقره که از آن ریسمان AB عبور کرده فرض مینمائیم بمقتضای B
 باری بسته شده که AB قوه مانند Q وارد میسازد. بمقتضای A قوه مانند P
 بقسمی وارد میسازیم که با قوه Q تقابل نماید. برای دستگاه
 مرکب از ریسمان و قرقره قوای خارجی عبارتند از
 قوای P و Q و وزن دستگاه و عکس العمل محور قرقره
 عمل و عکس عملهای مشترك نقاط قوس CD و نقاط
 مختلفه ریسمان نسبت باین قوس قوای داخلی خواهند بود
 ۸
 برخلاف اگر ریسمان را به تنهایی در نظر بگیریم عمل نقاط قوس
 CD بر آن قوای خارجی محسوب میگردند.



۴- برای مایعی که در ظرفی بحال تعادل است قوای خارجی عبارتند
 از وزن نقاط مختلفه مایع و فشار جو بر نقاط مختلفه سطح آزاد مایع و
 فشاری که از جدار ظرف بر آن وارد میگردد.
 برای دستگاه مرکب از مایع و ظرف عکس العمل جدار ظرف بمنزله
 قوای داخلی محسوب میگردد و قوای خارجی عبارتند از وزن مجموع
 مایع و ظرف و فشاری که از جو وارد میگردد و عکس العمل جدار
 خارجی ظرف در مقابل فشار.

۱۶- قضیه اصلی - هرگاه یکدسته نقاط مادی بحال تعادل
 باشند حاملهایی که نمایش قوای خارجی میباشند تشکیل دستگاهی
 معادل با صفر میدهند.

چنانچه S_i دستگاه مرکب از حاملهای نمایش قوای داخلی باشد این قوی
 دو بدو متقابل میباشند بنا بر این دستگاه S_i معادل با صفر است. نتیجه
 انتقالی OR_i و عزم مجموع OG_i از این دستگاه نسبت بنقطه غیر مشخص
 O نیز مساوی صفر میباشد.

هرگاه S_e دستگاه مرکب از قوای خارجی و OR_e و OG_e نتیجه انتقالی
 و عزم مجموع ایندستگاه نسبت به نقطه O فرض شوند چون بنا بفرض
 دستگاه نقاط مادی مزبور بحال تعادل اند هر يك از نقاط مشكله دستگاه نیز
 بحال تعادل خواهد بود و در نتیجه حاملهای نمایش قوای وارد بر نقطه
 خواه قوای داخلی خواه قوای خارجی باشند باید تشکیل دستگاه معادل با
 صفر بدهند یعنی بعبارة اخیری باید دستگاه S که مرکب از دو دسته قوای
 مزبور است معادل صفر گردد. ولی چون این دستگاه معادل با مجموع
 دو دستگاه S_e و S_i است پس نتیجه انتقالی آن نیز عبارت از نتیجه دو
 حامل OR_e و OR_i میشود. این نتیجه نظر باینکه دستگاه S معادل صفر
 است برابر صفر میشود و چون حامل OR_i نیز صفر است پس حامل OR_e
 صفر خواهد گردید و بهمین دلیل حامل OG_e نیز مساوی صفر میشود.
 یعنی دستگاه S_e معادل صفر میگردد.

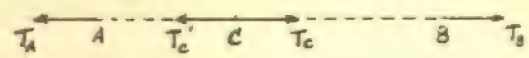
۱۷- شش شرط لازم برای تعادل - اگر ox و oy و oz محورهای
 مختصات اختیار شوند برای آنکه حاملهای OR_e و OG_e برابر صفر شوند
 لازم و کافی است که تصاویرشان بر سه محور صفر گردد بنا بر این میتوان
 گفت که قوای خارجی یکدستگاه باید دارای شش شرط مزبور باشند
 تا دستگاه بحال تعادل قرار گیرد.

سه شرط از شرائط مزبور اینستکه مجموع مقادیر جبری تصاویر قوای خارجی

بر سه مجور متعامد برابر صفر باشند و سه شرط دیگر آنکه مجموع مقادیر جبری عزمهای آنها نسبت باین محورها صفر شود.
معمولاً شرائط مزبور را تحت معادلات ذیل نمایش میدهند:
$$L=M=N=0 \text{ و } X=Y=Z=0$$

تبصره - شرائط مذکور لازم اند ولی کافی نیستند مثلاً اگر يك قطعه کائوچوك تحت تاثیر در قوه متقابل باشد بحال تعادل نیمماند و حال آنکه این قوی حاوی شرائط فوق میباشد چنانکه بعد ها خواهیم دید وقتی شرائط کافی است که جسم مفروض صلب باشد.

۱۷ - مورد استعمال . کشش نخ - چنانچه AB قطعه نخی بجرم غیر قابل ملاحظه متعلق بدستگاهی بحال تعادل باشد و T_A متجه جمع اعمال نقاط دیگر دستگاه بر نقطه A از قطعه AB اختیار گردد و نیز T_B منتهجه قوای وارده بر نقطه B از قطعه AB فرض شود.



جرمهای نقاط مختلفه قطعه AB و همچنین اوزان آنها که حاصل ضرب g در مقدار m است غیر قابل ملاحظه میباشد، چنین فرض میکنیم که هیچ قوه خارجی بر قطعه AB اثر ننموده باشد تنها قوای خارجی وارد بر این قطعه T_A و T_B میباشد و این قوی متقابل خواهند بود و محملشان بر خط AB قرار دارد حال اگر C نقطه غیر مشخصی از قطعه AB باشد و رشته را از نقطه C قطع نمائیم و قطعه BC را بر داریم برای آنکه تعادل قطعه AC بر قرار شود باید نقطه C از این قطعه تحت تاثیر قوه T_C قرار گیرد و بنا بر استدلال فوق لازم است که قوه T_C بر امتداد T_A واقع بوده و در نتیجه نقطه C بر خط AB قرار داشته باشد و از اینجا این نتیجه عاید میگردد:

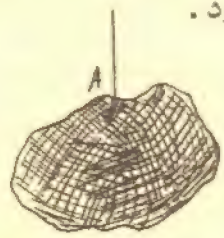
هر قطعه از رشته قابل انعطاف بدون جرم که متعلق بدستگاهی بحال تعادل است لزوماً مستقیم الخط است، وقتی تنها قوای خارجی بر این قطعه نخ بدو منتهایش اثر نمایند.

هر نقطه مانند C از قطعه AB را میتوان بعنوان قطعه ملاحظه نمود که از یکطرف و جانب دیگر تحت تاثیر قوای متقابل T_C و T'_C است و کمیت قوای مزبور برای جمع نقاط خط AB یکسان است این قوی کشش رشته اند، بنا بر این کشش رشته برای جمع نقاط قطعه AB مقدار ثابت است.

چون رشته قابل انعطاف است واضح است برای آنکه نخ ممتد باشد باید قوای T_A و T_B بقسمی باشند که در شکل (۹) ملاحظه میشود.

نتایج فوق را در مورد شاقول ملاحظه میکنیم که مرکب است از نقطه A بجرم m که بنقطه ثابت O بوسیله ریسمانی قابل انعطاف بسته شده جرم OA غیر قابل ملاحظه است، نقطه A تحت تاثیر قوه وزن خود (mg) و عمل رشته بر نقطه A یعنی همان قوه که متقابل با وزن A است بحال تعادل میباشد. نقطه مادی A بر نقطه A از ریسمان قوه T_A را که متقابل با عمل رشته بر A است وارد میسازد این قوه یعنی T_A بصورت همان جاملی که نمایش وزن (mg) است نموده میشود.

قوای وارده بر ریسمان عبارتند از T_A و عکس العمل نقطه ثابت O، این قوی دارای امتداد مشترك OA میباشد و بهمین جهت است که: شاقول همواره امتداد قائم مکان را معین میسازد.



۱۸ - وزن جسم - میتوان جسم را مرکب از توده نقاط مادی فرض نمود، سقوط جسم را در خلا بواسطه آویختن به نقطه A متوقف میسازیم، قوای خارجی که جسم تحت تاثیر آنها

است عبارتند از عمل F نقطه تعلیق A و وزنها P_1 و P_2 و P_3 و ... و P_n

نقاط مختلفه جسم . اما وزنها قوای متوازنند و نتیجه انتقالی آنها که در امتداد قائم مکان و بطرف تحت ممتد است دارای مقداری برابر $P = p_1 + p_2 + \dots + p_n$ میباشد .

بنابر این قوه F که باید معادل با اوزان p_1 و p_2 و ... و p_n باشد در امتداد قائم خواهد بود . این قوه بطرف بالا ممتد بوده و مقدارش P است . بنا بر این اثر جسم بر نقطه تعلیق A بصورت قوه خواهد بود که بطرف پایین ممتد بوده و مقدارش برابر P است . این قوه بنا بر تعریف وزن جسم است و یا عبارت دیگر وزن جسم عبارت از مجموع اوزان نقاط مختلفه آن است .

۱۹ - جرم جسم - جرم جسم بنا بر تعریف برابر مجموع اجرام نقاط مختلفه آن است . اگر M جرم جسم و m_1 و m_2 و ... و m_n جرم نقاط مختلفه آن باشد این رابطه برقرار است :

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

چون طرفین تساوی را در g ضرب نمائیم و ملاحظه کنیم که طرف ثانی آن همان وزن P از جسم است حاصل میشود .

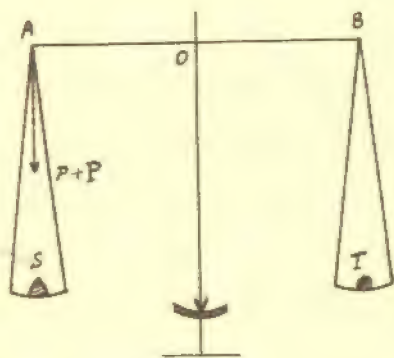
$$Mg = P$$

اما چون M بستگی بطریقه که جسم را مرکب از نقاط مادی تصور کرده ایم ندارد معلوم میشود جرم M نیز بستگی بآل ندارد .

۲۰ - تعیین مقدار جرم بوسیله ترازو - A را نقطه تعلیق یکی از کفه ها و P را وزن این کفه و S را وزن جسم واقع در این کفه اختیار مینمائیم . فرض میکنیم بوسیله جسم T که در کفه دیگر قرار داده ایم شاهنگ ترازو بحال تعادل باشد .

دستگاه حاصل از جسم S و کفه که در آن این جسم را قرار داده ایم تحت قوای خارجی که وزن P و وزن P' و عکس العمل نقطه A از شاهنگ

بر کفه ترازو میباشد . بحال تعادل است . بوسیله استدلالی که قبلا متذکر شدیم معلوم میشود که



این عکس العمل قائم و ممتد در جهت فوق میباشد . مقدارش برابر $P+P'$ است . بنا بر این عمل کفه نسبت شاهنگ بنا بر تساوی عمل و عکس العمل قوه قائمی است که مقدارش $P+P'$ بوده و بطرف پایین ممتد است و نقطه اثر این قوه همان نقطه

۱۱۱

A میباشد . و این مطلب بستگی بوضع جسم S در کفه ترازو ندارد . قوای خارجی شاهنگ AOB عبارتند از عکس العمل محور O بر آن و وزن شاهنگ و عکس العملهای نقاط A و B بوسیله کفه ها . مجموع جبری مقادیر عزمهای این قوه نسبت بمحور O برابر صفر است و چون عزمهای عکس العملهای محور بمناسبت اینکه این قوی محور را قطع مینمایند صفر است لازم میاید مجموع عزمهای سایر قوای مذکور صفر شود .

حال بجای جسم S در کفه جسم دیگر S' را قرار میدهم بطریقی که باز کفه بحالت تعادل قرار گیرد . اگر P' وزن جسم S' باشد ، عمل کفه که بر نقطه A آویخته شده عبارت از $P+P'$ خواهد بود و چون قوای خارجی دیگر کفه همانهایی هستند که در حالت اول مشاهده شد عزمهای قوای P و P' وارد بر نقطه A نیز مانند فوق خواهند بود و از این مطلب نتیجه میشود $P = P'$ حال اگر M و M' جرمهای اجسام S و S' باشند معلوم میگردد $M = M'$ بنا بر این تساوی دو جرم معین گردید .

گاهی ملاحظه میشود که در نتیجه اصطکاک وقتی در کفه ترازو وزن نسبتی کمی قرار دهیم باز تعادل آن برقرار میماند. باید ترازو بقدری حساس باشد که کوچکترین وزن نیز تعادل آنرا بهم بزند.

اکنون واحدی برای جرم اختیار نموده فرض میکنیم اجرام دیگری نیز معادل با این واحد ساخته باشیم. برای تعیین جرم جسم S آنرا بر یکی از کفه های ترازو قرار داده و بوسیله گذاشتن وزنه در کفه دیگر تعادل را برقرار مینمائیم بعد جسم S را بر داشته بجای آن عده کافی واحد جرم قرار میدهم تا مجددا تعادل برقرار گردد. واضح است عده واحد های جرم برابر جرم جسم S میباشند. این عمل وقتی بهتر انجام میگردد که قبلا اجرامی برابر مضارب واحد جرم تهیه کرده باشیم همچنین ممکن است اجرامی که اجزاء واحد جرم باشند نیز انتخاب نمود برای مواردی که جرم S مضرب صحیحی از واحد جرم نباشد.

سنجش مستقیم مقدار قوی

۲۱- برای سنجش قوی وسائلی سهل در کار است که عبارتند از سنجش شتابانی که قوای مزبور در نقاط جرمی ایجاد مینمایند.

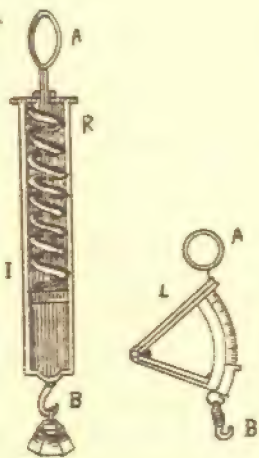
برای سنجش قوی میتوان واحدی برای قوه اختیار نمود بنا بر این واحد قوه را وزن جسمی اختیار میکنیم که در مکانی معین مقدارش برابر m است پس مقدار وزن مزبور عبارت است از $p = mg$ ، اگر واحد قوه را همان قوه اختیار کنیم که در ضمن تعیین قوه بوسیله دستور $F = m\gamma$ نموده میشد این واحد که آنرا بطور اختصار واحد عادی قوه میگوئیم عبارت از قوه است که در واحد جرم شتابی برابر واحد ایجاد نماید.

اگر p' وزن جسمی در محلی باشد که بوسیله واحد عادی قوه معین گردیده و m' جرم آن اختیار شود چنین خواهیم داشت $p' = m'g$ (g شتاب ثقل محل مزبور است).

نسبت $\frac{p'}{p}$ عبارت از وزن دوم اینجسم است یا واحد اختیار شده و این مقدار برابر $\frac{m'}{m}$ نیز میباشد بقسمی که میتوان گفت بوسیله ترازو میتوان مقدار وزن جسمی را تعیین نمود بنا بر آنکه واحد قوه وزن جسمی مخصوص در همین مکان باشد.

۲۲- میزان القوه - قوانین تغییر از وزن موجود است که میتوان آنها را بطریق بهتری بوسیله میزان القوه تعیین نمود.

شکل (۱۲) نمایش میزان القوه هائی است که قسمت اصلی آنها فنری است که در محفظه (R) قرار دارد (برای اولی) یک تیغه L بشکل زاویه (برای دومی). وقتی اسباب را بوسیله حلقه A بنقطه پیاپی بزنند بآن وزنی را بوسیله حلقه B آویخت. فنر دارای طولی معین میشود. واضح است که فنر تحت تاثیر قوای مختلفه طولهای مختلفه اختیار مینماید. بنا بر این همواره با یک وزن معین طولش مقداری مشخص خواهد شد بنا بر آنکه آثار قوای وارده بر فنر در ضمن عمل باعث ارتجاع آن نشده باشند. بوسیله آویختن وزنه های معین به میزان القوه میتوان آنرا مدرج نمود.



برای سنجش قوانین غیر از وزن باید ملاحظه نمود که مقاومت متقابل بواسطه فنر بسبب تغییر شکلی که در جهت AB ایجاد میگردد تنها سنگی بشکلی (طول یا انقباض) که فنر اتخاذ میکند دارد. هنگامیکه نشانه فنر در مقابل یکی از تقسیمات مثلا D باشد قوه که بر نقطه B اثر نموده باید متقابل با همین عکس العمل از فنر باشد مقدار این

قوه بوسیله عدد در جات تقسیم D معین میگردد.

نیز ملاحظه میکنیم که میزان القوه وقتی تحت تاثیر قوای واصل نقاط A و B واقع میشود باید بقسمی باشد که قوه در امتداد خط AB متوجه باشند و وزن میزان القوه را در مقابل قوای مقصود سنجش آنها است هیچ میانگاریم

آحاد اصلی

۲۳. آحاد اصلی معرفة القوى و علم تعادل قوی.

در معرفة القوى و علم تعادل قوی نه تنها آحاد معرفة الحركات مورد احتیاج است بلکه برای کمیات دیگر مانند جرم و قوه نیز تعیین آحادی لازم میگردد سلسله آحادی که غالباً برای سنجش کمیات بکار میروند از اینقرارند،

۱. سلسله متری. آحاد اصلی این سلسله عبارتند از واحد طول، واحد جرم، واحد زمان، واحد طول متر است. واحد جرم تن میباشد که هزار برابر جرم يك کیلوگرام قرار دادی است واحد زمان ثانیه زمان شمسی متوسط است

ب. سلسله CGS. سلسله CGS یا سانتیمتر و گرم و ثانیه اختلافی با سلسله متری ندارد مگر آنکه در آن واحد طول سانتیمتر یعنی $\frac{1}{100}$ متر و واحد جرم $\frac{1}{1000}$ جرم يك کیلوگرم قرار دادی است در این سلسله واحد قوه دین است و آن قوه ایست که چون بر يك گرم جرم وارد شود در آن شتابی برابر واحد طول ایجاد نماید.

ج. سلسله M.S.K.F. آحاد اصلی این سلسله عبارتند از متر و ثانیه زمان شمسی متوسط و وزنی که يك کیلوگرم جرم قرار دادی در پاریس در سطح آبهای ساکن دارد (کیلوگرم فرس)

در این سلسله واحد جرم عبارت از واحد مشتق است بقسمی که دستور $F=mg$ مقدار قوه را بجرم و شتابی که در آن جرم از قوه ایجاد میگردد ربط دهد.

برای وقتی که $m=1$ نتیجه میشود $F=g$ واحد جرم عبارت از جرمی است که اگر بر آن قوه وارد شود در آن شتابی ایجاد کند که عدداً مساوی قوه وارده باشد، بخصوص اگر G در این دستگاه مقدار شتاب ثقل باشد ($G=9.81$) واحد جرم عبارت از جرم جسمی میشود که ورزش 9.81 برابر واحد قوه باشد.

در سلسله اخیر چنانکه ملاحظه میشود واحد قوه و در نتیجه واحد جرم با انتخاب نقطه معین از سطح زمین بستگی پیدا میکند و بهمین جهت است که غالباً سلسله CGS را بآن ترجیح میدهند. ولی چون این اختلاف در مورد اعمال صنعتی محسوس نیست یعنی تغییرات G خیلی قلیل است برای سهولت بیشتر سلسله M.S.K.F. در عملیات جراثقالی مورد استعمال دارد

تمرینات

۱. شتاب ثقل g در بای برج ایفل معین است مقصود محاسبه شتاب است در بالای برج. فرض آنکه بدانیم شتابهای ثقل در دو نقطه واقع بر يك قائم به نسبت معکوس مجذورات فواصل آنها از مرکز زمین است مثال عددی: $g=9.81$ در سلسله CGS و مقدار تقریبی شعاع زمین ۶۳۶۶ کیلومتر است

۲. فرض میکنیم مقدار زاویه بین قائم مکان و شعاع زمین در همین مکان باشد معین کنید برای کدام يك از مدارات ارضی این زاویه ماکزیموم است زمین را بشکل کره حقیقی فرض مینماییم و g را در معدل النهار برابر ۹۷۸ اختیار میکنیم (در سلسله CGS) با همین مفروضات g را برای نقطه M که شعاع آن با معدل النهار زاویه 45° ایجاد مینماید حساب کنید

۳. میدانیم که در سلسله CGS مقدار شتاب ثقل در پاریس ۹۸۱ است مقصود تعیین مقدار این شتاب است وقتی که آحاد طول و زمان میلیمتر و دقیقه شود

۴. وزنه p بستهای طنابی که میتواند بالا و پایین برود آویخته شده تقسیمه میتوان بآن هر يك از دو نوع حرکت را وارد ساخت. طناب قابل انعطاف ولی غیر قابل تغییر است و جرم آن غیر قابل ملاحظه میباشد مقاومت هوا را نیز صفر فرض مینماییم چه حرکتی باید بوزنه p داد تا کشش طناب همواره اولاً بوزن p مساوی باشد ثانیاً دو برابر وزن p شود ثالثاً نصف وزن p گردد و اینها مساوی صفر شود

۵- یا چه سرعتی نقطه وزنی را باید بطور افقی رها کرد برای اینکه بر زمین نیفتد و دور زمین بگردد فرض آنکه $g = 981$ متر در ثانیه و $R = 6376$ کیلومتر باشد مقدار سرعت را بحسب متر در ثانیه حساب کنید.

فصل دوم

استاتیک نقطه

استاتیک نقطه آزاد

۲۴- تعادل نقطه مادی - قبلا ثابت کردیم که شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه مادی که در زمان t_0 سرعتش صفر است، از زمان t تا زمان t_1 بحال تعادل باقی بماند این است که نتیجه قوایی که بر آن اثر مینماید همواره بین دو زمان مزبور برابر صفر باشد.

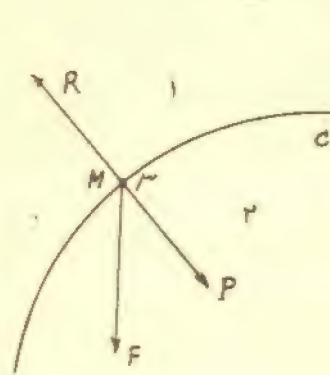
برای آنکه شرایط مذکور را بطور تحلیلی بیان نماییم سه محور متعامد Ox و Oy و Oz را اختیار مینماییم. فرض میکنیم (F_1) و (F_2) و ... و (F_n) قوایی باشند که بر نقطه مفروض M وارد شده اند؛ تصاویر قوه F_i را بر محورهای مختصات X_i و Y_i و Z_i فرض میکنیم برای آنکه نتیجه قوای مزبور صفر باشد لازم و کافی است که مقادیر جبری تصاویر آن بر محورها صفر گردد یعنی:

$$(1) \begin{cases} X_1 + X_2 + \dots + X_n = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = 0 \\ Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n = 0 \end{cases}$$

در حالت مخصوصی که جمیع قوای وارده در يك صفحه واقع باشند شرایط مزبور بدو شرط اول منجر میگردد بعبارة اخیری شرط تعادل نقطه این است که مجموع مقادیر جبری تصاویر قوی بر دو محور عمود برهم برابر صفر باشد

تعادل نقطه مادی که باید بر منحنی ثابتی متکی باشد.

۲۵- عکس العمل منحنی. فشار نقطه بر منحنی - فرض میکنیم نقطه مادی M بخواند همواره بر منحنی ثابت C باقی بماند، این نقطه تحت اثر قوایی است که نتیجه آنها را F اختیار کرده ایم؛ این نقطه در نقطه M با منحنی تماس دارد، عمل منحنی بر نقطه M بوسیله نقطه M وارده میگردد این قوه است مانند R که آنرا عکس العمل منحنی بر نقطه M مینامیم میتوان نقطه M را آزاد فرض نموده و بجای منحنی C قوه R را قرار داد بنا بر این نقطه M تحت اثر دو قوه F و R واقع خواهد بود.



بنا بر اصل تساوی عمل و عکس العمل نقطه M بر نقطه M قوه مانند P وارد میسازد که متقابل با قوه R است این قوه عبارت از فشار M بر منحنی است برای آنکه نقطه بر منحنی متکی باقی بماند میتوان لوله فلزی بشکل منحنی ساخته و نقطه M را داخل آن اختیار نمود.

یا آنکه رشته فلزی نازکی منحنی شکل اختیار نموده نقطه M را مانند حلقه کوچکی فرض کرد که رشته فلزی درون آن قرار داشته باشد. اما غالبا در عمل نقطه M را بر منحنی که دارای فرو رفتگی است قرار میدهند. اگر منحنی C مستوی باشد صفحه را بدو قسمت ۱ و ۲ قسمت مینمایند قسمیکه میتوان F یعنی نتیجه قوای وارده بر M را در این صفحه

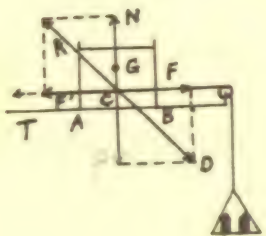
اختیار نمود. اگر نقطه M بحال تعادل باشد قوه F متقابل با عکس العمل R از منحنی خواهد بود هرگاه نقطه M دارای حرکت باشد شتاب در صفحه مسیر C قرار دارد، حامل (mv) نیز در همین صفحه است. اما حامل (mv) نتیجه قوای F و R است از اینجا نتیجه میشود که R نیز در همین صفحه است در هر دو حالت فشار P از M بر منحنی در صفحه واقع میباشد. زیرا این فشار متقابل با R است. برای آنکه نقطه M از منحنی مسیر جدا نشود باید این فشار بقسمی متوجه باشد که نقطه بر منحنی بچسبید بعبارۀ دیگری باید قوه R بطرف ناحیه ۱ متوجه باشد. اگر مثلاً در ضمن حرکتی این شرایط مفقود شوند نقطه از منحنی جدا میگردد و پس از آن حرکتش مانند حرکت نقطه مادی آزاد میشود که تنها تحت اثر قوایی است که نتیجه آنها R اختیار شده.

۲۶ - قوانین تجربی اصطکاک و لغزش - در اواخر قرن هجدهم

کولن تجاربی برای تعیین امتداد عکس العمل R نموده از اینقرار:
صندوقی که قسمت فوقانی آن بار است بر میز افقی AB قرار میدهند. هنگامیکه صندوق بر میز بطور عادی قرار دارد وزن نقاط مادی مختلفی که مجموعاً مشکل صندوق و اشیاء واقع در آن میباشند بانضمام عکس العملهای نقاط تماس نیز تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند. حاملهای نمایش اوزان در امتداد قائم میباشند. این حاملها معادل با یک حامل واحد اند که میتوان مبداء آن را مرکز حاملهای مزبور اختیار نمود. نقطه G همان نقطه ایست که آنرا مرکز ثقل مجموعه صندوق و اشیاء واقع در آن میگویند. بقسمی که اگر P نمایش این حامل واحد باشد عبارت از وزن مجموعه مزبور خواهد بود.

حاملهایی که نمایش عکس العملهای میز هستند باید با P تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند، از اینجا نتیجه میشود که نتیجه انتقالی آنها

نسبت به نقطه G حاملی مانند N متقابل با P است قسمیکه عزم مجموعش نسبت به G صفر باشد. بعبارۀ دیگری حاملهای نمایش عکس العمل تشکیل حامل واحدی مانند N میدهند این حامل نمایش عکس العمل میز است و این قوه قائم بر میز است.



۱۴ س

وزنه هائی که در کفه قرار داده شده و بوسیله قرقره به طنابی آویخته شده بود وارد میساخت. اگر عکس العمل بحالت قائم بر میز باقی بماند. کمترین قوه F محرك لغزش صندوق میگردد زیرا دستگاه قوای P و F و عکس العمل قائم نمیتوانند تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند. اما مشاهده میشود مادام که F از حدی مانند Q متجاوز نشده صندوق لغزش نمی نمایند؛ فرض میکنیم این شرط برقرار باشد.

صندوق تحت اثر قوه F و وزن P و عکس العمل R بحال تعادل است عکس العمل R باید بصورت حاملی متقابل با نتیجه حاملهای F و P یعنی CD باشد که مبداء آن محل تلاقی محملهای F و P است.

R را نتیجه دو قوه N قائم بر میز و F' بموازات میز اختیار مینمائیم از تقارن حاملهای R و CD نسبت به C معلوم میشود که $N = F'$ و $F' = F$ چنانچه F ترقی نماید مادام که از حد خود Q متجاوز نشده قوه R همین مولفه ها را حفظ خواهد نمود اما امتدادش با قائم زاویه ایجاد میکند که بتدریج زیاد میگردد. پس نتایج تجارب کولن چنین میشود

۱ - حد Q به وسعت سطوح اصطکاک بستگی ندارد

۲ - حد Q به نوع مواد نقاط تماس بستگی دارد

ج- حد Q متناسب با فشار قائمی است که بوسیله جسم وارد می گردد بطور خلاصه نسبت $\frac{Q}{P}$ عبارت از ضریبی مانند f است که فقط به طبیعت سطوح تماس بستگی دارد و آنرا ضریب اصطکاک لغزش از موقع حرکت میخوانند.

حال فرض میکنیم قوه F از Q تجاوز کند جسم بحرکت در میاید و تجربه ثابت میشود که نسبت $\frac{F}{P}$ همواره برابر ضریب f باقی خواهد ماند که سرعت حرکت بستگی نداشته بلکه تابع نوع سطوح تماس است و بوسعت آنها بستگی ندارد. f ضریب اصطکاک لغزش در موقع حرکت است و مقدار آن مختصری کمتر از ضریب اصطکاک لغزش از موقع حرکت است قوانینی که مذکور افتاد کاملاً دقیق نیستند مگر بین بعضی حدود فشار و سرعت. مثلاً اگر سرعت دارای مقدار قابل ملاحظه شود مقدار f تنزل می نماید.

بعلاوه در صنعت سطوح اصطکاک را بکمک اندود از قبیل چربیهای نباتی و حیوانی و امثال آنها تخفیف میدهند؛ سطوح اندود شده کمتر تابع قانون کول میباشند.

۲۷- تعادل نقطه که متکی بر منحنی ثابتی بوده و میتواند بر آن بدون اصطکاک بلغزد - بنا بر تعریف کویند نقطه میتواند بدون اصطکاک بر منحنی بلغزد اگر عکس العمل منحنی بر آن قائم باشد.

برای آنکه نقطه M که بر منحنی بدون اصطکاک دارای لغزش است تحت تاثیر قوای وارده بدان بحال تعادل باشد باید نتیجه قوای مزبور یعنی F متقابل با عکس العمل منحنی شود بنا بر این لازم است که قوه F نیز مانند عکس العمل، قائم بر منحنی شود.

کافی بودن شرط مزبور را قبول میکنیم باین معنی که اگر این شرط برقرار باشد منحنی دارای عکس العملی متقابل با نتیجه قوی یعنی F خواهد بود در حالی که نقطه بتواند از منحنی جدا شود بعلاوه باید فشار وارده از نقطه بر منحنی یعنی قوه که بهمان صورت F نودده میشود قسمی ممند باشد

که نقطه را بر منحنی بچسباند.

۲۸- تعادل نقطه که متکی بر منحنی ثابتی بوده و بر آن میتواند دارای لغزش با اصطکاک باشد - از قوانین تجربی کولن چنین مستفاد میشود که شرط لازم و کافی برای تعادل نقطه که بر منحنی ثابتی متکی بوده و بر آن میتواند دارای لغزش با اصطکاک باشد این است که نسبت مولفه مماسی نتیجه قوای وارده بدان به مولفه قائم همین نتیجه کمتر یا مساوی ضریب اصطکاک لغزش نقطه بر منحنی باشد اگر F نتیجه قوای وارده بر M باشد که بر منحنی C متکی است در وضع P از نقطه M قوه F را بدو قوه F_t که بر مماس مرسوم از نقطه P بر منحنی واقع است و F_n که بر قائم همین نقطه قرار دارد تجزیه مینماییم و آنها را مولفه های مماس و قائم قوه F میخوانیم. هرگاه f ضریب اصطکاک موقع عزیمت باشد شرط تعادل نقطه M از نامساوی ذیل معین میگردد

$$(1) \quad F_t \leq f \cdot F_n$$

ψ را زاویه حاده فرض میکنیم که ظلش برابر f باشد و این همان زاویه ایست که به زاویه اصطکاک در موقع عزیمت موسوم است؛ α را

زاویه حاده F با مماس

در نقطه P اختیار مینماییم

از مثلث قائم الزاویه

PAB حاصل میشود

$$\cot \alpha = \frac{F_t}{AB} \quad \text{و چون}$$

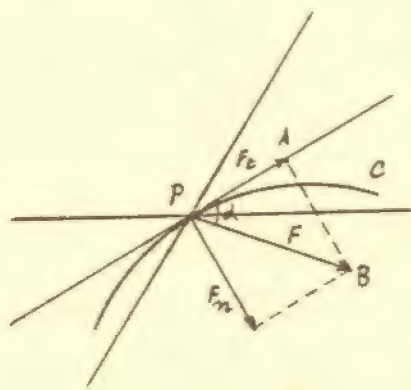
$$AB = F_n \quad \text{پس رابطه (۱)}$$

بدین صورت در میاید

$$\cot \alpha \leq \tan \psi$$

α و ψ حاده اند پس از

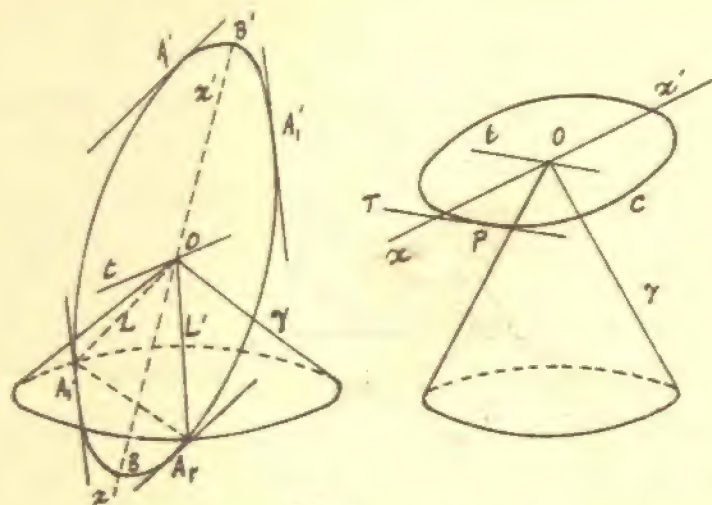
این نامساوی حاصل میشود



$$\alpha \geq \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{یا} \quad \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \varphi$$

از این نامساوی حاصل میشود که امتداد قوه F باید خارج مخروط دواری باشد که رأسش P و محورش مماس این نقطه بر منحنی و مولدش با محور زاویه اصطکاک را ایجاد مینماید. وقتی نقطه بقسمی باشد که $F_t = F_n$ و یا $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ کوبند نقطه در حال حد تعادل است. چنانچه کسی از F_t تجاوز کند یعنی α کمتر از $\frac{\pi}{2} - \varphi$ شود M بحرکت در میاید و جهت حرکت موافق جهت مولفه مماسی قوه F است.

مثال - اوضاع تعادل نقطه مادی را بر دایره که بر آن نقطه متکی بوده و دارای لغزش و اصطکاک است تعیین کنید.
فرض میکنیم O مرکز دایره بوده و صفحه آن با صفحه افق زاویه قائمه یا حاده ایجاد نماید و i مقدار این زاویه باشد، φ را زاویه اصطکاک نقطه بر محیط دایره اختیار مینمائیم و p را وزن نقطه فرض میکنیم.



۱۶

برای آنکه تعادل برقرار گردد لازم و کافی است که مماس بر دایره

در نقطه P (یکی از اوضاع تعادل) با قائم زاویه ایجاد میکند که بیشتر یا مساوی متمم زاویه φ باشد بهتر آنست تحقیق کنیم که مماس PT خارج مخروط دواری واقع شود که محور قائم بوده و زاویه مولدش با محور برابر $\frac{\pi}{2} - \varphi$ باشد.

یا آنکه اگر از نقطه O خط OT را بموازات مماس PT رسم کنیم OT باید خارج مخروط دواری که رأسش O و مولدش با محور قائم زاویه برابر متمم φ احداث مینماید واقع گردد.

بنابر وضع خط Ox یعنی بزرگترین شیب صفحه دایره چند حالت تشخیص میدهیم.

۱ - $i < \varphi$ در اینصورت Ox خارج مخروط γ خواهد بود بازاء جمع اوضاع P خط OT خارج مخروط γ خواهد بود، **جميع نقاط دایره اوضاع تعادل نقطه اند.**

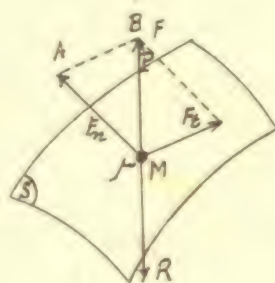
ب - $i > \varphi$ در اینحال Ox داخل مخروط γ است صفحه ممایل مخروط γ را در دو خط OL و OL' قطع مینماید. P وقتی بوضع تعادل است که OT نسبت باین دو خط در همانزاویه که Ox قرار دارد واقع نباشد، نقاط تماس مماسهای متوازی با خطوط L و L' تا قوسهای A_1BA_2 و $A_1'B_1'A_2'$ را معین مینماید، جميع نقاط این قوسها اوضاع تعادل نقطه و منتهای آنها اوضاع حد تعادل میباشد.

ج - $i = \varphi$ در اینحال مخروط γ با صفحه دایره در Ox متماس است جميع نقاط دایره اوضاع تعادل اند و دوسر قطرافقی از دایره حد تعادل میباشد اگر نقطه M دارای حرکت بدون اصطکاک باشد اوضاع تعادل آن بر دایره نقاط B و B' خواهد بود. چنانچه نقطه متحرک در B باشد و آنرا کمی از اینحالت منحرف نمائیم مولفه مماسی وزن نقطه مجدداً آنرا بوضع B عودت میدهد و اینحالت از تعادل را پایدار مینامند و بهمین طریق معلوم میشود که تعادل نقطه B' ناپایدار است.

تبادل نقطه مادی متکی بر سطح ثابت

۲۹ - عکس العمل سطح . فشار نقطه بر سطح - فرض میکنیم

M نقطه مادی باشد که بر سطح ثابت S متکی است و F را منتهی قوای وارده بدان اختیار مینمائیم ، نقطه M در نقطه μ با سطح S تماس دارد و بواسطه همین نقطه است که عمل سطح به نقطه وارد میگردد ، عمل مزبور قوه مانند R است که آنرا عکس العمل سطح میخوانیم ، میتوان نقطه M را آزاد دانست بشرط آنکه قوه R را نیز بقوای مفروض اضافه نمائیم .



س ۱۷

بنا بر اصل تساوی عمل و عکس العمل نقطه M بر نقطه μ قوه P را که متقابل R است وارد میسازد ، این قوه همان فشار P بر سطح S است . برای آنکه نقطه بر سطح باقی بماند میتوان آنرا مابین دو سطح بینهایت نزدیک بهم اختیار کرد ولی غالباً در عمل نقطه را بطور عادی بر سطح قرار میدهند و برای آنکه بر آن باقی بماند باید فشار P بقسمی ممتد باشد که نقطه را بر سطح بچسباند یا بعبارۀ دیگر باید عکس العمل R در جهتی که نقطه بر سطح گذاشته شده ممتد باشد ، هنگامیکه در نتیجه حرکت نقطه شرط مزبور مفقود گردد نقطه از سطح جدا شده آزاد میگردد .

۳۰ - تبادل نقطه واقع بر سطح بنا بر آنکه بتواند بر آن دارای لغزش بدون اصطکاک باشد - بنا بر تعریف گویند نقطه میتواند لغزش بدون اصطکاک داشته باشد هرگاه عکس العمل سطح قائم بر آن باشد . وقتی چنین باشد برای آنکه نقطه P از سطح یکی از اوضاع تبادل M

باشد لازم است که منتهی قوای مفروض یعنی F هنگامیکه نقطه M بر P واقع است متقابل با عکس العمل سطح باشد یعنی قوه F قائم بر سطح گردد کافی بودن شرط فوق را قبول میکنیم باینمعنی که اگر شرط مزبور مقرر باشد ، سطح عکس العملی متقابل با منتهی F بروز میدهد .

در حالتیکه نقطه بطور عادی بر سطح گذاشته شود باید فشار نقطه M یعنی همان قوه که بصورت حامل F تموده میشود بقسمی باشد که نقطه را بر سطح بچسباند .

۳۱ - تبادل نقطه واقع بر سطح بنا بر آنکه بتواند بر آن دارای لغزش با اصطکاک باشد - از قوانین تجریدی کوان چنین نتیجه میگردد : شرط لازم و کافی برای تبادل نقطه واقع بر سطح بنا بر آنکه بر آن دارای لغزش با اصطکاک باشد این است که نسبت مؤلفه مماسی منتهی قوای وارده بر نقطه به مؤلفه قائم همین منتهی کمتر یا مساوی ضریب اصطکاک لغزش نقطه بر سطح باشد .

فرض میکنیم نقطه M بر نقطه μ از سطح قرار داشته باشد (س ۱۷) و F منتهی قوایی باشد که بر آن وارد میگردند ، F_n را تصویر F بر قائم نقطه μ از سطح اختیار مینمائیم میتوان F را منتهی F_n و قوه دیگری همسنگ AB فرض نمود و این قوه ایست که در صفحه مماس بر سطح از نقطه μ واقع است ، F_t و F_n مؤلفه های قائم و مماس F میباشد . شرط تبادل ارنامساوی

$$(۱) \quad F_t \leq f F_n$$

معین میشود ، f ضریب اصطکاک لغزش موقع عزیمت میباشد .

α را زاویه حاده $F_t \mu A$ فرض میکنیم یعنی همان زاویه که F با قائم μ ایجاد مینماید ، مثلث $F_t \mu A$ قائم الزاویه است پس $\operatorname{tga} = \frac{F_t}{F_n}$ چون بجای f ظل زاویه φ را قرار دهیم نامساوی (۱) بدین شکل درمیآید .

$$(۲) \quad \alpha \leq \varphi$$

از این نامساوی معلوم میگردد که محمل حامل F داخل مخروط دوارى که رأسش M و محورش قائم بر سطح از همین نقطه بوده و زاویه مولدش با محور مساوى زاویه اصطكاك است.

تبصره. همانگونه که در تعادل نقطه بر منحنى ذکر شد در اینجا نیز میتوان شرط تعادل نقطه را بر سطحى بدون اصطكاك تعیین نمود.

۳۳. آثار و اسباب اصطكاك - اصطكاك اسبابهای يك ماشین

باعث استعمال مواد مشكله آنها میگردد. بوسیله صیقلی ساختن سطوح اسبابها میتوان تا اندازه از مقدار اصطكاك كاست، علاوه بر این مقداری از قوه محرك ماشین باید صرف تقابل با اصطكاك گردد، بهمین سبب اسبابها در نتیجه اثر قوای وارده دارای حرارتی شده و انبساط آنها باعث عدم استحکام ماشین میگردد؛ يك قسمت عمده از قوه محرك بوسیله مقاومت اثاثیه ماشین از بین میرود، تنها بقیه قوه مزبور است که مورد استعمال پیدا میکند.

معذلك اصطكاك بعضی اوقات دارای آثار مفیده است. مثلا بسبب اصطكاك است که ما میتوانیم بر زمین راه برویم، بدون اصطكاك نمیتوانیم هیچ شیئی را در دست بگیریم، یا پیچی را در تخته پیچانیم، تسمه های ماشین ها بوسیله اصطكاك فلکه ها را بحركت در میاورند، خاصیت ترمز از تقایج مستقیم اصطكاك است.

چون بوسیله صیقلی کردن سطوح میتوان از مقدار اصطكاك كاست معلوم میشود یکی از اسباب اصطكاك خشونت سطوح تماس دو جسم است بعلاوه برای از بین بردن اصطكاك باید سطوح تماس هر يك از دو جسم را جدا گانه صیقلی کرد.

تمرینات

۶. دو قوه ۲۴۳ کیلو گرمی بر يك نقطه اثر نموده اند زاویه بین قوای برابر $۱۳۷^{\circ}۳۹'$ است مقصود تعیین مقدار قوه ایست که باید بر نقطه وارد شود تا بحال تعادل باقی بماند

۷. سه نقطه A و B و C واقع بر يك استقامت مفروض اند نقطه C مابین A و B قرار دارد فاصله AB برابر ۱۰ متر است و BC مساوی ۲۰ متر، از نقطه B خط BD را چنان رسم مینمائیم که با BC زاویه ۶۰° ایجاد نماید از نقطه C عمود CD را بر خط BD فرود میاوریم و خط AD را رسم مینمائیم؛ حالا بر نقطه D در امتداد BD قوه برابر ۱۰۰۰ کیلو گرم وارد شده مقصود تعیین قوای P و Q است که در امتداد DA و DC وارد شوند بقسمی که نقطه D بحال تعادل باشد؛ ثابا اگر زاویه BDC غیر مشخص باشد مقدار اینزاویه را بقسمی تعیین کنید که قوه Q کوچکترین مقادیر ممکنه را دارا گردد

۸. بر نقطه A در يك صفحه قوای AB و AC و AD و AE و AF وارد شده مقادیر آنها بترتیب ۲، ۳، ۴ و ۵ و ۷ و ۲ میباشد امتداد قوای بوسیله تساوی های $(AB, BC) = ۴۵^{\circ}$ و $(AB, AD) = ۱۳۵^{\circ}$ و $(AB, AE) = ۲۲۵^{\circ}$ و $(AB, AF) = ۳۱۵^{\circ}$ معین گردیده ثابت کنید نقطه A بحال تعادل است

۹. نقطه بوسیله سه قوه مساوی مفروض جذب شده، وضع تعادل آنرا تعیین کنید

۱۰. نقطه M مجنوب روس مثلی است مقدار قوای مزبور kAB و kAC و kBC میباشد مقصود تعیین وضع تعادل نقطه است

۱۱. سه رشته قابل ارتجاع از يك ماده با يك مقطع، بوسیله یکی از انتهایشان بر روس مثلی بسته شده اند رشته هارا بوسیله سه انتهای دیگرشان بیکدیگر گره زده اند، طول اولیه رشته ها باید بجه نسبتی باشد تا وضع تعادل گره بر نقطه تلاقی میانه های مثلث باشد بفرض آنکه بدانیم کشش رشته متناسب با افزایش طول آن به واحد طول است بدینمعنی که مقدارش برابر $k + k \frac{x-l}{l}$ مقداری ثابت و l طول اولیه رشته و x طول آن پس از کشش است

۱۲. نقطه M تحت تاثیر نقاط A_1 و A_2 و ... و A_n با قوایی که بصورت حاملهای $m_1(MA_1)$ و $m_2(MA_2)$ و ... و $m_n(MA_n)$ اند قرار دارد؛ m_1 و m_2 و ... و m_n ضرایب مفروضی میباشند بعلاوه نقطه M تحت اثر قوه دیگری که از حیث کثیت و امتداد ثابت است واقع میباشد؛ ثابت کنید همواره نقطه مانند G موجود است بقسمیکه منتجه قوای مفروض بصورت حامل $\mu(MG)$ نموده میشود؛ μ ضریب غیر معینی است؛ وضع تعادل نقطه M را تعیین نمائید

۱۳. متحرکی بحركت ثوسانی ساده متحرك است مقصود تعیین قوه واحدی است بحسب میدان نوسان بقسمیکه قابل حصول حرکات مزبوره باشد

۱۴. متحرکی بر سهمی که معادله اش $y^2 = 2px$ است تحت اثر قوه که بعرض نقطه اثر بستگی دارد سیر مینماید؛ مقصود تعیین قوه مزبور است در حالات ذیل

۱. تصویر نقطه بر محور دارای حرکت مشابه است، ب. تصویر متحرك بر تماس

راس دارای حرکت متشابه است، ج - تصویر متحرك بر مماس راس دارای حرکت متشابه تغییر است، ۵ - تصویر نقطه متحرك بر مماس راس دارای حرکت نوسانی ساده بر مرکز راس منحنی است

۱۵ - نقطه دارای حرکتی مستقیم الخط است که سرعت v از آن تابعی معین از طول متحرك بر مسیر است مقصود تعیین قوه است که قابلیت ایجاد چنین حرکتی داشته باشد مثال: $v=kx$ و $v=k\sqrt{a^2-x^2}$ و $v=\sqrt{2gx}$ و a و k و g مقادیر ثابته اند

۱۶ - مقدار قوه واحدی که باعث ایجاد حرکت مستدیر متشابه باشد تعیین نمایند

۱۷ - نقطه نسبت به مرکز بیضی معینی که معادله است $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ است متحرك میشود حرکت نقطه بنا بر قانون مساحت صورت میگردد

۱ - مقصود محاسبه مختصات متحرك است بحسب زمان، برای این منظور ملاحظه میکنیم که متناظر با هر نقطه از بیضی مختصات x و y زاویه مانند α موجود است عینکه $x = a \cos \alpha$ و $y = b \sin \alpha$ را بحسب زمان حساب مینماییم، ثابت کنید اگر نقاط M و M' از منحنی بقسمی باشند که OM' موازات سرعت M گردد بین سرعت مزبور و OM نسبت ثابتی برقرار خواهد بود

ب - اگر بدانیم مقدار قوه که قابل ایجاد چنین حرکتی است تابع فاصله O متحرك است این تابع را تعیین کنید

۱۸ - متحرك M بیضی را تحت قانون مساحت نسبت به کانون F از منحنی سیر مینماید (حرکت سیارات) ۱ - ثابت کنید هودوگراف این حرکت نسبت به قطب F' دایره است که بواسطه حرکت دورانی دایره اصلی بیضی حول F' بر زاویه برابر يك قائمه حاصل شده ب - قوه واحدی که قابلیت ایجاد چنین حرکت را داشته باشد دارای مقداری مساوی $\frac{k}{FM^2}$ است آنکه k مقدارش ثابت و برابر $\frac{ma^2}{b^2}$ باشد m جرم نقطه و A دو برابر سرعت سطحی و a و b نیمه های محوره های اطول واقصر بیضی میباشد

۱۹ - اگر متحركی بر بیضی هندوالی یا سهمی نسبت به یکی از دو کانون موافق قانون مساحت حرکت نماید هودوگراف حرکت F نسبت به همین کانون دایره است، دایره وقتی مسیر سهمی باشد بر این نقطه میگذرد

بالعکس اگر متحركی تحت قانون مساحت نسبت به نقطه F حرکت نماید و هودوگراف حرکت متشابه نسبت به قطب F دایره باشد مسیر متحرك بیضی هندوالی است که کانون آنها F است بنا بر آنکه دایره بر نقطه F نگذرد و در غیر اینصورت مسیر سهمی است

۲۰ - چنانچه نقطه بر سهمی تحت قانون مساحت نسبت به کانون F سیر نماید، قوه واحدی

که قابلیت ایجاد این حرکت را داشته باشد دارای مقداری مساوی $\frac{k}{FM^2}$ است k مقدارش ثابت و مساوی $m \frac{A^2}{p}$ میباشد بنا بر آنکه m جرم نقطه و A دو برابر سرعت سطحی Vitesse aréolaire و p نمایش پارامتر سهمی باشد

۲۱ - نقطه M بوزن p باید بر قطعه خط AB که با افق زاویه $\alpha = BAX$ را ایجاد نموده متکی باشد بعلاوه این نقطه تحت تأثیر دو قوه افقی MF و MH که هر دو در صفحه قائم مار بر AB قرار دارند واقع میباشد، دو قوه مزبور مختلف الجبهه بوده و مقادیرشان بترتیب مساوی حاصل ضربهای MA و MB در عددی مانند m است

پیش آنکه $AB = d$ مقصود تعیین فاصله MA است تا نقطه بحال تعادل قرار گیرد آیا تعادل پایدار است، فشار وارد بر AB چقدر است اگر بعلاوه فرض کنیم $\frac{MF}{MA} = m$ بین چه حدودی باید زاویه α واقع باشد تا مسئله ممکن گردد

۲۲ - نقطه بدون اصطکاک بر بیضی سیر میکند، نقطه مزبور بواسطه دو قوه متناسب با شعاع حامل متناظر خود مجذوب دو کانون است، در چه نقطه از منحنی باید متحرك M را بدون سرعت اولیه قرار داد تا بحال تعادل باشد

۲۳ - نقطه M در صفحه مثلث مقروضی تحت تأثیر قوای MA و MB و MC قرار دارد نقطه M باید بر خط مقروضی واقع در صفحه مثلث بدون اصطکاک قرار داشته باشد، وضع تعادل این نقطه را تعیین کنید

۲۴ - بر خط افقی $X'X$ نقطه مادی M بوزن P میتواند لغزشی با اصطکاک داشته باشد ضریب اصطکاک برابر $\frac{1}{2}$ است، نقطه مزبور بواسطه نقطه که فوق $X'X$ در صفحه قائم مار بر این خط واقع شده جذب میگردد، قوه جذبه برابر $2P$ است زاویه بین $X'X$ و MA را α اختیار مینماییم

بنا بر آنکه نقطه M بدون سرعت اولیه رها شده باشد مقصود تعیین رابطه بین α و φ است برای آنکه M بحال سکون باقی بماند، اگر حرکت موجود است معلوم کنید M ادوا فوق $X'X$ است یا بر این خط لغزش مینماید

۲۵ - نقطه M بوزن p باید بر سهمی که محورش قائم است بدون اصطکاک حرکت نماید این نقطه با قوه متناسب با شعاع حامل MF دفع میگردد، وضع تعادل نقطه M را تعیین کنید، عکس العمل منحنی را مشخص سازید، بفرض آنکه نقطه منحنی صرف بالا باشد - نقطه وزن باید بر سهمی که محورش قائم و راسش بطرف بالا است واقع باشد - بعلاوه این نقطه بواسطه نقطه از محور متناسب با فاصله اش از محور جذب میگردد، اوضاع تعادل نقطه را تعیین کنید، اصطکاک را حاصل مینماییم

۳۶ - نقطه مادی وزین بجرم m باید داخل دایره واقع در صفحه قائم که قطر AB از آن افقیه است باقی بماند. قوه ثابت F مجذوب نقطه A است.

۱ - وضع تعادل نقطه M را تعیین کنید.

ب - عکس العمل دایره چقدر است

مثال عددی - $m=18$ و $g=980$ در سلسله CGS و $F=1$

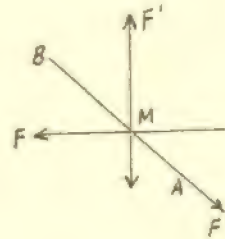
۳۷ - نقطه وزین می تواند با اصطکاک بر سطحی بهر محور افقی سیر کند اوضاع تعادل نقطه را تعیین کنید

۳۸ - نقطه مادی وزین M باید بدون اصطکاک بر محیط دایره واقع در صفحه قائم سیر نماید. این نقطه مجذوب نقطه A منتهای قطر افقی دایره است مقدار قوه متناسب با فاصله MA است. اوضاع تعادل نقطه M را تعیین نموده عکس العمل دایره را حساب کنید

۳۹ - نقطه وزین M بر منحنی معادله $xy=k$ است قرار دارد محور xy قائم است مقدار قوه افقی را تعیین کنید که قوه همه جا بحال تعادل باشد. اصطکاک موجود نیست

۴۰ - میدانیم سطح آزاد مایعی در حالت حرکت بدین طریق تعیین میگردد که اگر مایع را متجمد سازیم و نقطه مادی وزینی را در نقطه غیر مشخصی از سطح آزاد مزبور قرار دهیم قسمی که با جسم حاصل در حرکت باشد این نقطه نسبت به جسم حاصل بحال تعادل باقی بماند

مقصود تعیین سطح آزاد مایع در ظرف استوانه شکل است بنا بر آنکه حول محور قائم استوانه در حرکت باشد. مقدار جرم مایع خارج شده از ظرف را وقتی سرعت زاویه مقدار مفروضی است حساب کنید بنا بر آنکه قبل از حرکت ظرف از مایع پر باشد



س ۱۸

۴۱ - نقطه مادی باید بر صفحه که بزرگترین شیب آن AB است بحال تعادل باشد. قوای وارده بر نقطه عبارتند از وزن P و سه قوه F و F' و F'' مقدار سه قوه اخیر سه برابر P است و محلهای آنها بترتیب افقیه و قائم و BA است (س ۱۸)

۱ - زاویه صفحه را با افق تعیین کنید. ب - فشار بر صفحه را مشخص سازید. اصطکاک صفر است

۴۲ - دو قوه مفروض F و F' بترتیب بموازات صفحه افق و خط بزرگترین شیب صفحه مایل بمیل i میباشند (i نامعلوم است) قوای مزبور متوالیا بر نقطه مادی وزینی که بر صفحه واقع بوده و میتواند بر آن بدون اصطکاک بلغزد وارد میگردد. مقصود تعیین وزن W نقطه است برای آنکه در دو حالت بوضع تعادل قرار گیرد. میل صفحه

چقدر است. مقدار نسبت $\frac{F}{F'}$ را بقسمی تعیین کنید که زاویه صفحه با افق 45° باشد

۴۳ - بر صفحه افقی ثابتی نقطه M بوزن P مجذوب نقطه O واقع در تحت صفحه با فاصله a میباشد قوه جاذبه برابر $\frac{k}{OM}$ است. k عدد مثبت مفروضی است. مقصود تعیین

اوضاع تعادل نقطه است. ضریب اصطکاک را f اختیار کنید

مثال عددی: $f=0.22$ و $k=14$ (CGS)

۴۴ - نقطه مادی وزینی بر صفحه افقی ثابتی قرار دارد. نقطه برشته قابل ارتجاعی بسته شده سر دیگر رشته بر صفحه ثابت شده است. فرض میکنیم کشش رشته متناسب با افزایش طول آن باشد. اوضاع تعادل نقطه را بفرض آنکه بتواند با اصطکاک بر صفحه بلغزد تعیین کنید

۴۵ - در صفحه قائمی Ox و نقطه A بر آن با فاصله a از O قرار دارد. شعاعی OD فوق Ox بقسمی است که $\angle(Ox, OD) = \frac{\pi}{4}$ حلقه M بوزن P در D بلغزد این حلقه با قوه

kMA مجذوب نقطه A است

۱ - ثابت کنید که حلقه بر خط D تغییر مکان میدهد و نتیجه قوای مفروض وارد بدان بر خطی است که بر نقطه ثابتی مرور مینماید

ب - ضریب اصطکاک حلقه بر D برابر f است. حلقه را باید بر چه قسمت از خط D قرار دارد تا بحال تعادل قرار گیرد

۴۶ - دو محور متعامد $x'Ox$ و $y'Oy$ و دو نقطه A و A' بر $x'Ox$ با فاصله a از مبدا قرار دارند. نقطه M از صفحه از نقاط A و A' بفواصل r و r' واقع میشود بر این

نقطه قوای F و F' با کبیات $\frac{(MA)}{AM^2 - a^2}$ و $\frac{(MA')}{a^2 - A'M^2}$ وارد شده اند

۱ - اگر P محل تلاقی $x'Ox$ و خط اثر (Ligne d'action) نتیجه این قوی باشد

مقصود محاسبه نسبت $\frac{PA}{PA'}$ و طول نقطه P است. از این قسمت نتیجه بگیرید که

$PM=PO$ و اینکه نتیجه بر نقطه M مماس بر دایره است که در نقطه O بر Ox مماس است

ب - نقطه M بملاوه باید بر خطی که با Oy زاویه α را ایجاد نموده بدون اصطکاک

تغییر مکان دهد خط اخیر Oy را در نقطه بعرض b قطع نموده. اوضاع تعادل نقطه M

را بر این خط تعیین نماید.

فصل سوم دینامیک نقطه

۳۳- اثر قوه وارد بر متحرکی در حرکت آن ایجاد شتابی مینماید بدین معنی که سرعت متحرک را تغییر میدهد این اثر را ممکنست بوسیله کار قوه تشخیص داد.

دینامیک عبارت از یافتن روابطی است که بین کمیات قوه، شتاب، و کار موجود است.

دستور $(F) = (m\gamma)$ که رابطه بین قوه و شتاب است قبلاً بدست آورده ایم، این دستور را پس از این در حل مسئله کلی معرفة القوی بکار میریم و آن چنین است: قوه وارد بر نقطه مادی مشخص است تعیین حرکت نقطه مطلوب است.

مسئله فوق را فقط در حالتیکه قوه مفروض از حیث کمیت و جهت ثابت باشد حل میکنیم باین ترتیب که بدو نقطه را آزاد، و پس از آن مجبور بلغزش بر منحنی یا سطح صیقلی یا غیر صیقلی اختیار مینمائیم. مانند معرفة الحركات باید مسیر و قوانین حرکت را معین ساخته بعد در آن بحث کنیم.

۱- حرکت نقطه مادی آزاد

۳۴- حرکت موافق امتداد قائم. در لحظه $t=0$ متحرک M بجرم m در خلاء پرتاب شده مبدأ طول نقطه O ، سرعت اولیه v_0 و امتداد مسیر موافق امتداد قائم نقطه O است. واضح است تنها قوه که بر نقطه مفروض وارد میگردد وزن آن یعنی قوه قائم و ثابت است، جهت مثبت را از تحت بفرق اختیار مینمائیم.

۱- مسیر متحرک. سرعت اولیه در امتداد قائم $z'z$ از نقطه O مییابد

و شتاب $-g$ همواره بر همین امتداد باقی میماند، پس حرکت دائماً بر $z'z$ انجام میگیرد

۲- قانون حرکت. از معادله اصلی $(F) = (m\gamma)$ چنین نتیجه میشود.

$$(۱) \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g \quad \text{یا} \quad m - mg = m \frac{d^2z}{dt^2}$$

چون از رابطه (۱) دومرتبه تابع اولیه استخراج کنیم حاصل میگردد

$$(۲) \quad v = \frac{dz}{dt} = -gt + C \quad \text{و} \quad (۳) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + C'$$

C و C' مقادیر ثابت میباشند که اکنون آنها را تعیین مینمائیم مقادیر عددی معادلات (۲) و (۳) را در لحظه $t=0$ حساب میکنیم حاصل میشود:

$$C' = 0 \quad \text{پس} \quad z_0 = 0 \quad \text{اما} \quad z_0 = C' \quad \text{و} \quad v_0 = C$$

حالاً اگر در معادلات (۲) و (۳) بجای C و C' مقادیر عددی آنها را قرار دهیم نتیجه میشود:

$$(۴) \quad v = v_0 - gt \quad \text{و} \quad (۵) \quad z = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

میتوانیم سرعت را بحسب طول حساب نموده چنین بنویسیم

$$(۶) \quad v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gz}$$

۳- بحث حرکت. بدو آشتاب را ثابت اختیار

مینمائیم بسمیکه همواره حرکت متشابه التغير مسرعه باشد

۱- متحرک بدون سرعت رها شده یا از فوق

بفتح با سرعت پرتاب شده $v_0 \leq 0$

از معادلات (۴) و (۵) معلوم میشود که در این حال z منفی مییابد و مقدار آنها با t بنبات ترقی مینماید پس متحرک با سرعت متصاعدی سقوط خواهد کرد یعنی دارای حرکت متشابه التغير مسرعه است.

ب- متحرک از تحت بفرق پرتاب شده $v_0 > 0$

از معادله (۴) معلوم میشود که سرعت بدو مثبت بوده یعنی حرکت



متشابه تغییر مبطله است و پس از آن بازه $t_1 = \frac{v_0}{g}$ در نقطه M_1 مساوی صفر گردیده و در این موقع $OM_1 = z_1 = -\frac{v_0^2}{2g}$ است بعد منفی شده و مقدار آن بینهایت ترقی مینماید یعنی حرکت متشابه تغییر و مسرعه میشود.

از معادله (۶) معین میشود که متحرک در عبور خود از نقاط مسیر دارای سرعت های مساوی ولی مختلف علامه است.

تبصره - در حالت مخصوصی که $v_0 = 0$ دستوره های فوق بدین صورت در می آید

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{و} \quad v = \sqrt{-2gz} \quad \text{یا} \quad v = gt$$

۳۵- حرکت سهمی شکل - در لحظه $t=0$ نقطه M بجرم m در خلاء پرتاب شده، مبدأ حرکت O سرعت برابر v_0 بوده و امتداد آن با افق زاویه برابر α بین 0° و 90° ایجاد مینماید.

۱- قانون حرکت - اوضاع متحرک را بر سه محور متعامد مار بر نقطه O معین میسازیم Oz در امتداد قائم متوجه بوده و سرعت اولیه v_0 در صفحه xOz قرار دارد x و y و z را مختصات نقطه M در لحظه t اختیار مینمائیم، در این لحظه تنها قوه که بآن وارد میگردد وزن آن $-mg$ است که بموازات Oz میباشد.

طرفین معادله $F = (m\gamma)$ را بر محور ها تصویر میکنیم معادلات ذیل نتیجه میگردد.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \text{و} \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg$$

$$(۱) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g$$

از این معادلات معلوم میشود که تصویر حرکت نقطه M بر محورهای Ox و Oy متشابه است. از طرف دیگر میتوان محور ها را بقسمی اختیار کرد که تصویر v_0 بر محور Oy صفر باشد بقسمیکه متحرک تواند از صفحه v_0Oz خارج گردد و این صفحه بوسیله امتداد قائم و امتداد سرعت اولیه مشخص است بنا بر این باید حرکت نقطه را در صفحه xOz تعیین نمائیم، چون از

معادلات $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$ و $\frac{d^2z}{dt^2} = -g$ دو مرتبه استخراج تابع اولیه مینمائیم حاصل میگردد:

$$(۲) \quad \frac{dz}{dt} = -gt + C_1 \quad \text{و} \quad \frac{dx}{dt} = C$$

$$(۳) \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C'_1 \quad \text{و} \quad x = Ct + C'$$

حال مقادیر ثابت را محاسبه میکنیم، در لحظه $t=0$ بنا بر شرایط اولیه

متحرک چنین خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 &= v_0 \sin \alpha \quad \text{و} \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \cos \alpha \\ x_0 &= z_0 = 0 \end{aligned} \right\} (i)$$

در معادلات (۲) و (۳) را برابر

صفر اختیار مینمائیم نتیجه میشود

$$(۲)_0 \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = C \quad \text{و} \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = C_1$$

$$(۳)_0 \quad x_0 = C' \quad \text{و} \quad z_0 = C'_1$$

از معادلات فوق مقادیر ثابت تعیین میشوند از این قرار:

$$C_1 = v_0 \sin \alpha \quad \text{و} \quad C' = C'_1 = 0$$

$$C = v_0 \cos \alpha$$

بدین طریق میتوان معادلات

(۲) و (۳) را بصورت ذیل نوشت:

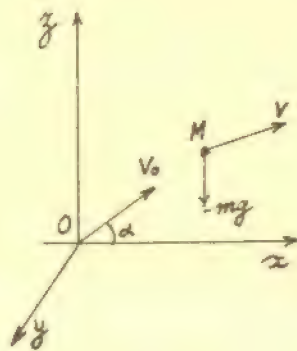
$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha \quad (۴)$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha \quad (۵)$$

$$x = v_0 \cos \alpha \cdot t \quad (۶)$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha \cdot t \quad (۷)$$

۲- مسیر متحرک - ۱- معادله مسیر - بین دو معادله (۶) و (۷)



ر. س

۴ را حذف میکنیم حاصل میشود $z = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + tg \alpha x$
 رابطه مزبور معادله سهمی بمحور قائم است که بر مبدا میکند.

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 &= \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} \\ z_1 &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \\ p &= \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \end{aligned} \right.$$

مختصات رأس منحنی
 (نقطه اما کریسم)
 ممیز

میدان هدف $OC = 2OB$ و یا $OC = 2x_1$.

۳- بحث در حرکت

بحث در حرکت را بوسیله

هودکراف مینمائیم.

قطب هودکراف را نقطه

O اختیار میکنیم، مختصات

منتهای V' چنین میشود:

$$x' = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$$

$$z' = \frac{dz}{dt} = gt + v_0 \sin \alpha$$

$$x' = v_0 \cos \alpha$$

معادله اول

که به t بستگی ندارد

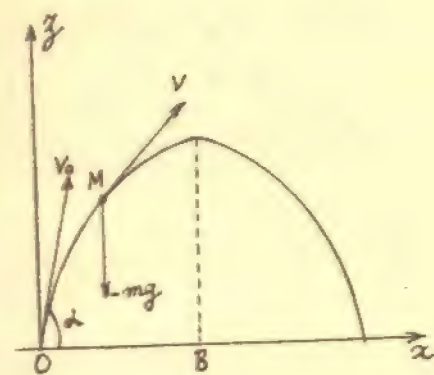
معادله هودکراف حرکت است و آن قائم $V_0 H$ است که فاصله $v_0 \cos \alpha$ از

محور Oz قرار دارد (س ۲۲) از معادله $z' = -gt + v_0 \sin \alpha$ معلوم میشود

که متحرک هودکراف دارای سرعت ثابت $-g$ است.

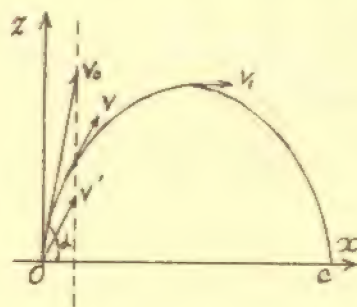
بسهولة میتوان بوسیله حرکت نقطه V' تغییرات سرعت متحرک M

را معین نمود، مقدار این سرعت از لحظه $t=0$ تا لحظه $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ که



س ۲۱

متحرک بر نقطه A واصل میگردد نزول مینماید یعنی در این فاصله از زمان



حرکت میطئه است، بعد از

لحظه t_1 سرعت بینهایت ترقی

مینماید یعنی حرکت مسرعه

میکردد.

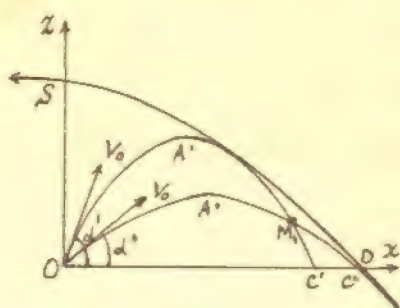
امثله ۱- تحت چه زاویه

باید M را با سرعت اولیه v_0 پرتاب

نمود تا بنقطه معین M_1 بمختصات

(x_1, y_1) واصل گردد.

ملاحظه میکنیم که مختصات M_1 در معادله (۸) صدق مینماید بقسمیکه



معادله بحسب tga تشکیل

میکردد بدین صورت:

$$z_1 = -\frac{g x_1^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} + x_1 t g \alpha$$

$$z_1 = -\frac{g x_1^2}{2 v_0^2} (1 + t g^2 \alpha) + t g \alpha$$

$$\frac{g x_1^2}{2 v_0^2} t g^2 \alpha -$$

یعنی بالاخره:

$$x_1 t g \alpha + z_1 + \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} = 0$$

مقدار α را که از این معادله بدست میاید زاویه هدف مینامند

بحث - معادله مزبور در صورتی دارای دوریشه حقیقی است که

$$x_1^2 - 4 \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} (z_1 + \frac{g x_1^2}{2 v_0^2}) \geq 0 \quad (a)$$

چون طرفین را بر $\frac{2 g x_1^2}{v_0^2}$ قسمت کنیم حاصل میگردد:

$$\frac{v_0^2}{2g} - z_1 - \frac{g x_1^2}{2 v_0^2} \geq 0$$

که میتوان آنرا بدین صورت نوشت

$$z_1 \leq -\frac{gx_1^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \quad (b)$$

منحنی (c) را رسم مینمائیم این منحنی

سهمی است به محور Oz و رأس S به سیمیکه $OS = \frac{v_0^2}{2g}$ و ممیز آن $\frac{v_0^2}{g}$

است و محور Ox را در نقاط D و D' قطع مینماید بطریقیکه $D = \frac{v_0^2}{g}$

$$OD' = -\frac{v_0^2}{g}$$

بنا بر شرط (b) باید $z_1 \leq z$ ؛ نقاط منحنی (c) و نقاط داخلی آن حائز شرط مسئله میباشند و حال آنکه نقاط خارجی فاقد این شرط هستند و از همینجا است که منحنی (c) را سهمی اطمینان مینامند.

۲- حرکت نقطه مادی غیر آزاد

۱. بدون اصطکاک

۳۶- حرکت مادی متکی بر منحنی مستوی صیقلی سیر مینماید.

S'S را منحنی مستوی و M را نقطه متحرک اختیار مینمائیم. میتوان این نقطه را تحت تأثیر قوه R و عکس العمل Φ آزاد فرض نمود

معادله حرکت از اتحاد:

$$m(I') = (F)$$

که میتوان آنرا بدینصورت نوشت

$$m(I') = (R) + (\Phi)$$

طرفین تساوی را بر امتداد مماس

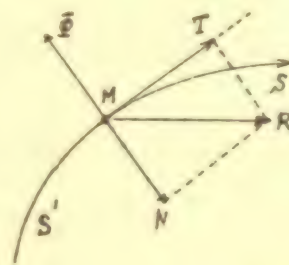
نقطه M از منحنی تصویر

میکنیم حاصل میشود

$$(I') = (R) + (\Phi) \text{ تصویر}$$

$$\text{اما } (\Phi) = 0 \text{ تصویر پس حاصل}$$

میشود



$$m \frac{dv}{dt} = R_t \text{ و } m \frac{d^2s}{dt^2} = R_t$$

و این معادله حرکت نقطه بر منحنی مفروض است مورد استعمال - معادله حرکت نقطه مادی را که بر محیط دایره قائمی متکی است تعیین نمائید.

M_0 را مبدأ طول اختیار مینمائیم و جهت مثبت آنرا از M_0 بطرف A فرض میکنیم. ضمناً جهت مثبت را بر قائم از فوق به تحت قرارداد مینمائیم

متحرک بدون سرعت از نقطه A

($M_0OA = a$) رها شده و در

لحظه t تحت اثر وزن خود (mg)

و عکس العمل Φ از دایره در نقطه M

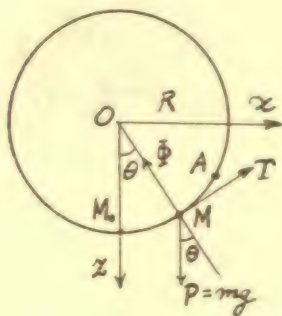
($M_0OM = \theta$) واقع میباشند

قوای مزیور را بر امتداد

مماس مرسوم از نقطه M تصویر

مینمائیم. تصویر Φ بر مماس

صفر است و تصویر (mg) چنینست



س ۲۵

$$mg \cos \phi = -mg \sin \theta$$

بنا بر این معادله ذیل نتیجه میشود

$$\frac{md^2s}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ پس } s = M_0M = R\theta \text{ اما}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \sin \theta \text{ و یا}$$

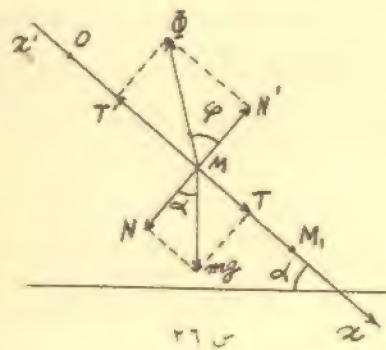
و این معادله فاصله حرکت پاندولی است

ب - با اصطکاک

۳۷- حرکت نقطه وزین بر صفحه مایل ناهموار - $x'x$ را

امتداد بزرگترین شیب صفحه و a را زاویه آن با افق اختیار مینمائیم.

در لحظه t نقطه وزین M تحت تأثیر وزن خود (mg) جهت قائم را از فوق بتحت اختیار مینمائیم) و قوه Φ که با قائم بر صفحه زاویه برابر φ دارد واقع مییابد، قوه قائم (mg)



س ۲۶

دارای مولفه مانند (N) قائم بر صفحه است که بوسیله عکس العمل (N') صفحه از بین میرود و یک مولفه مماسی T که بموازات بزرگترین شیب صفحه ممتد مییابد؛ تصویر مماسی Φ یعنی T' که آنرا قوه اصطکاک میگوئیم

در جهت مخالف سرعت متحرک ممتد است و مقدار آن چنین است

$$T' = N' \cdot \operatorname{tg} \varphi = mg \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

اگر سرعت اولیه صفر بوده یا در امتداد بزرگترین شیب صفحه ممتد باشد، متحرک همواره بر این خط واقع خواهد بود، زیرا شتاب مجموع قوای (T) و (T') موافق امتداد $x'x$ مییابد. بنا بر این در متحرک سرعتی موافق همین امتداد ایجاد مینماید.

حالت اول - متحرک از نقطه O بدون سرعت اولیه رها شده $v_0 = 0$

معادله حرکت - از دستور اصلی $(F) = m(\gamma)$ که بر محور $x'x$ تصویر

شود چنین نتیجه میگردد

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = T - T' = mg(\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \varphi)$$

$$\gamma = \frac{dx}{dt^2} = \frac{g \cdot \sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad \text{و یا (۱)}$$

چون از رابطه اخیر دو مرتبه تابع اولیه استخراج کنیم حاصل میشود

$$v = \frac{dx}{dt} = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot t \quad (۲)$$

$$x = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} t^2 \quad (۳)$$

بحث - ۱ - اگر $\alpha \leq \varphi$ (س قبل) M بیحرکت خواهد ماند زیرا در این صورت $T' \leq T$ قوه است که

متقابل با حرکت مییابد.

ب - اگر $\alpha > \varphi$ و یا $T > T'$ (س ۲۷)

M بطرف تحت لغزش خواهد نمود

زیرا قوه محرکی مانند $T - T'$ موجود

است که بطرف Ox متوجه مییابد، این

قوه مقدار ثابت است یعنی حرکت

متشابه التغییر و مسرعه است.

حالت دوم - متحرک بطرف

تحت با سرعت اولیه $v_0 > 0$ پرتاب شده

معادله حرکت - مانند حالت اول میتوان معادله حرکت را تعیین

نمود با این تفاوت که در اینحال مقدار ثابت استخراج تابع اولیه صفر

نیست. بنا بر این:

$$\gamma = \frac{d^2 x}{dt^2} = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \quad (۴)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot t + v_0 \quad (۵)$$

$$x = \frac{1}{2} g \cdot \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi} \cdot t^2 + v_0 t \quad (۶)$$

بحث - ۱ - اگر $\alpha < \varphi$ از معادله (۴) معلوم میشود که شتاب مقداری

ثابت ولی متغی است پس بدوا حرکت متشابه التغییر و مبطنه است.

سرعت در لحظه $t_1 = \frac{v_0 \cos \varphi}{g \cdot \sin(\varphi - \alpha)}$ صفر میشود بقسمیکه مقدار OM در

ایتموقع چنین است!

$$HM_1 = x = \frac{v_0^2 \cos \varphi}{2g \cdot \sin(\varphi - \alpha)}$$

برابر ۹۰ متر بشود، مسئله دارای دو جواب است، بازاء کدام يك از جوابها جسم زودتر بنقطه K میرسد، و بازاء کدام يك از آنها جسم با سرعت زیاد تر بنقطه K واصل میشود مقاومت هرا را غیر قابل ملاحظه و g را برابر ۱۰ متر در ثانیه منظور مبداریم

۴۰. دو صفحه قائم P متحرك M از نقطه A و از مبداء زمان بر افق Ax با حرکت مستأببی با سرعت v حرکت مینمایند O نقطه است که تحت قائم A بفاصله $OA = h$ قرار دارد در چه زمانی مانند t_0 باید نقطه مادی وزینی را با سرعت اولیه v_0 از نقطه O پرتاب کرد بقسمیکه زاویه آن با افق α بوده و متحرك M را ملاقات نمایند

مثال عددی: $v = ۷۲$ کیلومتر در ساعت و $v_0 = ۵۰۰$ متر در ثانیه و

$$tga = \frac{v}{v_0} \text{ و } h = ۲۰۰۰ \text{ متر}$$

ثانیه را واحد زمان و شتاب ثقل را ۶۰ متر در ثانیه اختیار مینماییم

۴۱. دو نقطه A و B در يك صفحه افقی و بفاصله d از یکدیگر قرار دارند، از نقطه A جسمی را در امتداد قائم A با سرعت اولیه v_0 از تحت بغوق پرتاب مینماییم در همین لحظه از نقطه B جسم دیگری را در امتداد خطی از صفحه قائم مار بر AB که زاویه α ایجاد مینمایند رها مینماییم

۱. مقصود محاسبه سرعت اولیه متحرك دوم است بدین آنکه متحرك اولی را تلاقی کند

ب. نقطه تلاقی، موقع صعود یا نزول متحرك اول یا دوم است

۴۲. نقطه مادی وزین M را در خلاء با سرعت اولیه v_0 بقسمی پرتاب مینمایم که سرعت اولیه آن با صفحه افقی مار بر O زاویه برابر α ایجاد نماید، در صفحه مسیر خطی مانند D مقروض است

۱. در چه زمانی متحرك M بر خط D واقع میگردد (مبداء زمان همان لحظه عزیمت از O است)

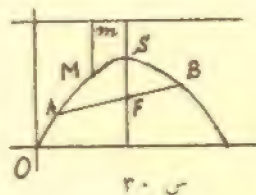
ب. بفرض آنکه v_0 مقدار معینی باشد مقصود محاسبه مقدار α است بقسمی که متحرك M در لحظه معین t_0 خط D را تلاقی کند

۱. در سهمی بگانون F و راس S وتر AFB را رسم مینماییم میتوان بوسیله محاسبه یا بطریقه هندسی است کرد

$$\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \frac{1}{FS}$$

ب. نقطه وزین در خلاء در نقطه O با سرعت اولیه v_0 که با افق میل α را دارد رها شده ثابت کنید سرعت v در وضعی از M که از صفحه افقی بارتفاع $\frac{v_0^2}{2g}$ بفاصله Mm قرار دارد بوسیله دستور $v^2 = 2gMm$ معین میگردد

ج. چنانچه v_0 و v_1 سرعت های متحرك هنگام وصول بنقاط A و B دو انتهای وتر



س ۳۰

AFB باشد ثابت کنید

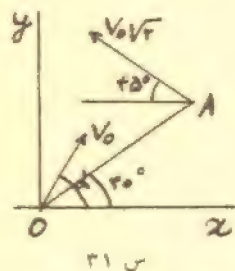
$$\frac{1}{v_1^2} + \frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

۴۳. دو محور متعامد Ox و Oy که دومی قائم و از تحت بغوق متوجه است مقروض اند متحرك m از نقطه O با سرعت v_0 که با افق زاویه برابر α ایجاد مینماید پرتاب شده، متحرك دیگر M در همین لحظه با سرعت $v_0/2$ میل 45° نسبت باقی از نقطه A ($OA = 2a$ و $\angle OAx = 30^\circ$) رها گردیده

۱. مختصات نقاط m و M را در زمان t معین کنید

ب. اگر نسبت $\frac{v_0}{V_0}$ برابر k باشد α را بقسمی تعیین کنید که دو متحرك یکدیگر را ملاقات نمایند، مبدیوم k چقدر است (بحث)

ج. شرایطی بین v_0 و V_0 و a و g مقرر نمایند که دو متحرك در موقع تلاقی دارای يك سرعت باشند



س ۳۱

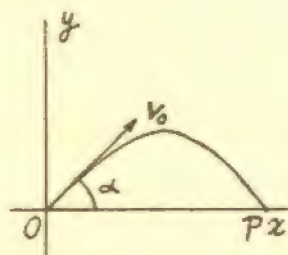
۵. طول نقطه تلاقی P دو متحرك را بحسب a و α تعیین نمایند α را چه مقدار باید اختیار کرد تا این طول برابر a شود، بنا بر معلوم بودن این مقدار مقادیر v_0 و V_0 را بحسب a و g معین نمایند، (برای این منظور شرایط ج را مراعات کنید) عرض نقطه P چقدر است، ثابت کنید در لحظه تلاقی سرعت مشترک دو متحرك برابر سرعت اولیه M است، دو مسیر را از مبداء عزیمت تا نقطه تلاقی رسم کنید

۴۴. جسم M را با سرعت اولیه v_0 که با افق زاویه α تشکیل میدهد پرتاب کرده اند در صفحه هدف حرکت مزبور را به محورهای Ox و Oy که اولی افقی و دومی قائم است نسبت میدهیم

۱. مقصود تعیین تغییرات OP بنا بر تغییرات α است

ب. محاسبه مساحت قطعه از سهمی که محصور بین افق و منحنی است منظور است و علاوه تغییرات آن را بازاء مقادیر مختلفه α تعیین نمایید

ج. از نقطه I (a, b) در صفحه هدف جسم M' را بحالت آزادی بدون سرعت اولیه در همان لحظه که جسم اول از O حرکت میکند رها کرده ایم زاویه α را بقسمی تعیین کنید که دو متحرك یکدیگر را تلاقی کنند



س ۳۲

مکان هندسی نقاط I را بقسمی تعیین کنید که نقطه تلاقی دو جسم بر صفحه افقی مار

بر O باشد ، بملاوه معلوم کنید که نقطه I باید در کدام ناحیه از صفحه هدف واقع باشد تا نقطه تلاقی فوق یا تحت افق O قرار گیرد

۴۵- از نقطه O جسم M با سرعت اولیه v_0 که با صفحه افق زاویه α ایجاد میکند پرتاب شده ، پس از زمان t_1 از نقطه A جسم M بدون سرعت اولیه رها گردیده

۱- مقصود محاسبه زمان t_2 است بقسمیکه جسم M' با جسم M ملاقات نماید

ب- در چه ناحیه نقطه A باید واقع باشد برای آنکه ملاقات دو جسم فوق یا تحت افق مار بر O اتفاق افتد

A را فوق صفحه افق مار بر O بافاصله h از صفحه و بافاصله d از قائم Oz مار بر نقطه O اختیار مینماییم مقاومت هوا را هیچ میندازیم

۴۶- متحرکی با سرعت ۲ متر در ثانیه در امتداد بزرگترین شیب صفحه که با افق زاویه 60° دارد بطرف بالا پرتاب شده ، پس از ده ثانیه متحرک چه فاصله از نقطه عزیمت خود دارد و سرعتش در این لحظه چقدر است ، اصطکاک صفر $g=980$ CGS

۴۷- بر صفحه شیب α جسمی با سرعت v_0 از تحت بفرق موافق امتداد بزرگترین شیب صفحه پرتاب شده پس از زمانی سرعت جسم برابر v میگردد در این حال مسافت مطلوب چقدر است

۴۸- در مثلث قائم الزاویه ABC که زاویه A قائمه و ضلع AB قائم است جميع خطوط مرسوم از نقطه A بر نقاط مختلفه وتر مانند AD را رسم میکنیم

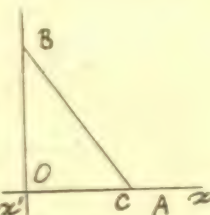
۱- زاویه BAD را زاویه اختیار میکنیم که جسم متحرک از A بدون سرعت اولیه خط AD را در مینموم زمان طی نماید

ب- ظل زاویه ACD را درحالتی معین کنید که زمان مینیموم مزبور مساوی نصف زمانی باشد که جسم موافق امتداد AB ساقط میگردد

۴۹- در صفحه قائمی تیغه افقی $x'Ox$ و نقطه A بر آن مفروض اند نقطه مانند A بر قائم O قرار دارد مستقیم BC واصل بین B و نقطه C واقع بر $x'Ox$ و مابین O و A میباشد

نقطه مادی وزینی بدون سرعت اولیه فوق B رها شده بقسمیکه بدوا امتداد BC و پس از آن امتداد CA را طی مینماید تیغه هارا که ملامت صغری فرض مینماییم و چنین تصور میکنیم که بمناسبت تیغه منحنی الخط کوچکی که بر نقطه C قرار داده ایم در موقع عبور از تیغه اولی بدومی تنها جهت سرعت متحرک تغییر میکنند ولی قدر مطلق آن ثابت میباشد

۱- مقصود محاسبه زمان T است که در آن متحرک از A به داخل میگردد بحسب $OA=a$ و $OB=b$ و g و $OC=x$ زاویه

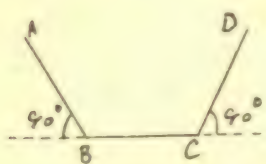


س ۳۳

ب- تغییرات آرا وقتی x تغییر مینماید تعیین نماید بقا بر آنکه C مابین O و A باقی ماند

۵۰- دو فرجه مجاور تشکیل سه صفحه عمود بر صفحه شکل که قائم فرض شده داده اند اثر اولی با صفحه شکل افقی BC و آثار دو صفحه دیگر خطوط AB و CD میباشد که با افقی مزبور میل 60° دارند بملاوه $AB=BC=CD=2$ متر

متحرکی را از نقطه A بدون سرعت اولیه رها کرده ایم بقسمیکه متوالیاً بر مسیرهای ABCD و DCBA و ... حرکت مینماید

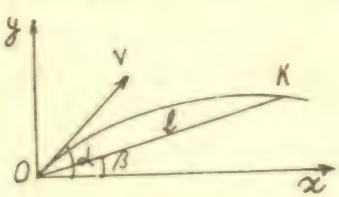


۱- قانون حرکت این نقطه چیست ، ب- بعد از چه زمانی مجدداً بنقطه A بر میگردد ، ج- دیاگرام سرعت ومسافت را نسبت بزمان t رسم کنید یا شتاب نقل برابر ۱۰۰۰ در سلسله CGS است

س ۳۴

۵۱- گلوله بدون سرعت اولیه از راس A صفحه AB بطول متر $l=8$ رها شده میل صفحه 35° است پس از چه زمان و بچه فاصله از موقع تلاقی قائم مار بر B زمین که بافاصله ۱۰ متر قرار دارد بزمین میرسد

۵۲- خط OK در صفحه قائمی که با افق Ox زاویه α را ایجاد مینماید واقع است نقطه مادی وزین M از نقطه O با سرعت اولیه افقی v_0 پرتاب شده در همین لحظه نقطه مادی وزین M' بر OK شروع بلغزش بدون اصطکاک مینماید مقصود تعیین تغییرات زاویه MM' با افق میباشد (شداب نقل را g اختیار نمائید)



س ۳۵

۱-۵۳- در صفحه قائم $x'Oy$ که با افق Ox قائم و قائم Oy مشخص است نقطه مانند K موجود است بقسمیکه $KOx=\beta < 10^\circ$ و $OK=l$

از نقطه O نقطه مادی وزین M را که بجرم m است با سرعت v رها کرده اند بطریقی که با افق زاویه α را که ایجاد مینماید $(\alpha < 10^\circ)$ نقطه مزبور ضمن حرکت سهمی شکل به نقطه K واصل میگردد مقصود تعیین مقدار مینیموم v است

برای آنکه متحرک بتواند بنقطه K برسد چنانچه مقدار مینیموم مزبور v باشد مقصود تعیین زمان وصول نقطه وزین به نقطه K است و بالاخره زاویه α که متناظر با این مینیموم است دارای چه مقدار میباشد

ب- میتوان نقطه M را بر صفحه مایلی که بزرگترین شیبش OK است حرکت داد تا نقطه K واصل گردد ، مقدار مینیموم v_1 سرعت برای این منظور و زمان سیر بر

OK چقدر است، ثابت کنید که طبقه اخیر برای وصول نقطه به K از نقطه نظر سرعت اولیه ترجیح داشته و از نقطه نظر زمان دارای نقص است یعنی

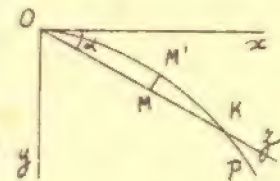
$$V_1 < V \quad \text{and} \quad T_1 > T$$

مثال عددی: بنا بر آنگاه $\beta = 1.892$ متضاد معادله است $\frac{V}{V_1}$ و زاویه

α متناظر با سرعت متنیوم V است

۵۱. در صفحه قائم xOy محور افقی Ox و محور دیگر Oz تحت این محور با زاویه حاده $\angle xOz = \alpha$ مفروض است نقطه مادی M حجم m را در Oz بدون

اصطلاحاً متحرک است، متحرک مزبور را با سرعت V_0 در جهت Oz پرتاب کرده اند، در همین لحظه متحرک دیگر M' را با جرم m با سرعت V'_0 در جهت Ox، بطور آزاد رها نموده اند. میدانیم متحرک



۱. معادلات حرکت مستقیم الخط M را نسبت

بمحور افقی Ox و محور قائم Oz بنویسید.

۴۶ م

ب. معادلات حرارت سهمی شکل M' را نسبت بهمین محورها تعیین نمائید

ج. چه روابطی باید بین مفروضات مسئله موجود باشد تا دو متحرک که از نقطه O با هم شروع به حرکت کرده‌اند در نقطه تقاطع OZ و سومی بعدیگر را ملاقات کنند.

۵- شرط قبل مقرر است تغییرات طول قطعه خط MM' مطلوب است هنگامیکه نو متحرک از O تا K مسیر می‌دهد.

۵۵. نقطه وزنی از راس صفحه مایلی بدون سرعت رها شده، برای سیر ۳۵ متر چقدر مدت لازم دارد. بفرض آنکه بر خط بزرگترین شیب صفحه سیر کرده و طول تصویر افقی این قطعه برابر ۱۸ متر و ضریب اصطکاک $\mu = ۰.۲۰$ باشد

۵۶. نقطه وزنی را بر خط ثابت OX با افق زاویه α را ($\alpha = 0,2$) ایجاد
مینماید بطرف بالا با سرعت v_0 برابر ۳ متر در ثانیه پرتاب کرده اند. ضریب اصطکاک
 $f = 0,1$ است. با چه سرعتی متحرک مجدداً بنقطه عزیمت خود رجعت مینماید.

زمان صعود و نزول را تا یکصدم ثانیه تقریب حساب نمائید.

فصل چہارم - کار

۳۸- موضوع کار در جراثقال حائز اهمیت بسیار است. زیرا عمل ماشینها تبدیل انرژی بکار است. در این فصل کار حاصل از قوه مفروضه به بنقطه مادی وارد شده تعیین مینمائیم.

بدوا مقدمات ذیلرا که در مورد تعریف کار استعمال میشود متذکر میشویم

۳۹. تعریف - حاصل ضرب هندسی دو حامل P_1 و P_2 عبارت است از

حاصل ضرب جبری ایندو حامل در جیب تمام زاویه بین آنها یعنی

$$(P_1) \times (P_2) = \overline{P_1} \times \overline{P_2} \cos(P_1, P_2)$$

محاسبة حاصل ضرب هندسي دو حامل بوسيلة طول تصاویر آنها

بر سه محور متعامد - فرض میکنیم نسبت به سه محور متعامد تصاویر

حاملهای (P_1) و (P_2) بر ترتیب $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ باشند یقیناً می‌توان

چندین نوشت

$$(P_2) = (X_2) \dashv (Y_2) \dashv (Z_2) \quad , \quad (P_1) = (X_1) \dashv (Y_1) \dashv (Z_1)$$

حاصل ضرب طرف اول در تساوی بنابر تعریف فوق همان حاصل ضرب

هندسه حاملها است و چون جماعت ط ف ثانیه یکی از دو تساوی را برترتب

در حمال طوفانی دگر بطریق هندسی ضرب نموده ملاحظه کنیم

که زاویه محور ها نسبت به قائمه بوده و ضمناً زاویه (Y_1, Y_2) و (X_1, X_2)

و (Z_1, Z_2) برابر صفر است حاصل می‌گردد.

$$(P_1)(P_2) = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$$

اما چون بنا بر تعریف $(P_1)(P_2) = \overline{P_1} \cdot P_2 \cos(P_1, P_2)$ پس نتیجه میشود

$$P_1 \cdot P_2 \cos(P_1, P_2) = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$$

$$\cos(P_1, P_2) = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$$

وزاین تساوی معلوم میگردد

حال اگر حامله‌های P_1 و P_2 بر یکدیگر عمود باشند یعنی $\cos(P_1, P_2) = 0$

نتیجه میشود

$$(۱) \quad X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$

حال اگر (α_1, α_2) و (β_1, β_2) و (γ_1, γ_2) را ترتیب زوایای حاملهای مفروض با محورهای مختصات اختیار نماییم بمناسبت تساویهای

$$X_1 = P_1 \cos \alpha_1 \quad Y_1 = P_1 \cos \beta_1 \quad Z_1 = P_1 \cos \gamma_1$$

$$X_2 = P_2 \cos \alpha_2 \quad Y_2 = P_2 \cos \beta_2 \quad Z_2 = P_2 \cos \gamma_2$$

رابطه (۱) را میتوان بصورت ذیل نوشت

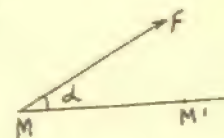
$$(۲) \quad \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0$$

و این رابطه شرط متعامد بودن دو خط را بحسب زوایای آنها با محورهای معین میسازد.

۱- کار قوی

برای توضیح بنوا در موارد مختلفه مخصوص کار را تعریف نموده سپس تعریف کلی آنرا ذکر مینمائیم.

۴۰. **اولا کار قوای ثابت - کار قوه ثابت (از حیث کمیت و امتداد و جهت) در تغییر مکان مستقیم الخط - کار قوه F (TF) در تغییر مکان MM' با نقطه اثر M عبارت است از حاصل ضرب هندسی:**



س ۳۷

$$(F) \cdot (MM')$$

و یا عبارت جبری $TF = \overline{F} \cdot \overline{MM'} \cos(F, MM')$ (۱)

دو عامل اول حاصل ضرب طرف ثانی تساوی (۱)

مثبت فرض میشوند پس علامت کار همواره با عامل سوم متحد است. بنا بر این:

کار مثبت یا محرك است اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ یا $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

کار منفی یا مقاوم است وقتی $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

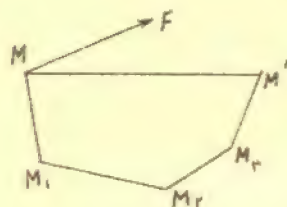
کار صفر است هرگاه $\alpha = \frac{\pi}{2}$ یا $\alpha = \frac{3\pi}{2}$

۴۱. **کار قوه ثابت در تغییر مکان مرکب - قضیه - کار قوه ثابت در تغییر مکان متجه مساوی مجموع جبری کارهای تغییر مکان مؤلفه‌هاست - فرض میکنیم قوه (F) و تغییر مکان متجه باشد بقسمیکه**

$$(MM') = (MM_1) + (M_1 M_2) + (M_2 M_3) + (M_3 M')$$

این تساوی هندسی را بر امتداد قوه (F)

تصویر میکنیم حاصل میشود



$$MM' \cos(F, MM') = MM_1 \cos(F, MM_1)$$

$$+ \dots + M_3 M' \cos(F, M_3 M')$$

طرفین این تساوی را در (F) ضرب میکنیم

حاصل میگردد:

$$F \cdot MM' \cos(F, MM') = F \cdot MM_1 \cos(F, MM_1) + \dots + F \cdot M_3 M' \cos(F, MM')$$

از این تساوی معلوم میشود که کار قوه (F) در تغییر مکان متجه (MM') برابر مجموع جبری کارهای تغییر مکانهای مؤلفه‌ها است.

تبصره - بطریقی مقشابه با فوق میتوان اثبات نمود که کار متجه (R)

از یکدسته قوای (F_1) و (F_2) و ... برابر مجموع جبری کارهای مؤلفه‌ها در تغییر مکان مستقیم الخط (MM') است. زیرا بنا بقرض

$$(R) = (F_1) + (F_2) + (F_3) + \dots$$

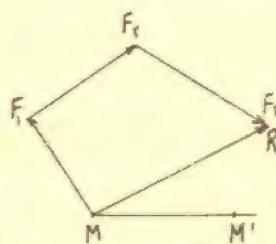
مجموع هندسی فوق را بر امتداد MM' تصویر

میکنیم نتیجه میشود

$$R \cos(R, MM') = F_1 \cos(F_1, MM') + F_2 \cos(F_2, MM') + F_3 \cos(F_3, MM') + \dots$$

طرفین تساوی را در MM' ضرب مینمائیم

حاصل میشود



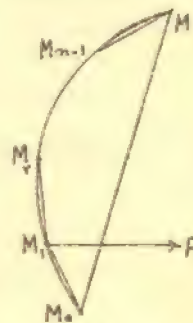
س ۳۹

$$R MM' \cos(R, MM') = F_1 MM' \cos(F_1, MM') + F_2 MM' \cos(F_2, MM') + F_3 MM' \cos(F_3, MM') + \dots$$

بنابر این حکم ثابت میشود.

۴۲. کار قوه ثابت در تغییر مکان منحنی الخط - فرض میکنیم MoM

منحنی مسیر نقطه اثر قوه ثابت (F) باشد، در این منحنی متکسری مرکب از n خط MoM_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ محاط میکنیم. فرض مینمائیم قوه F بجای سیر بر منحنی بر دوره متکسر حرکت نماید بنابر حکم قبل کار F در تغییر مکان MoM برابر کار قوه در امتداد وتر MoM است، چون n را بسمت بینهایت میل دهیم دوره متکسر به منحنی MoM نزدیک میگردد یعنی کار بر امتداد منحنی.



س ۴۰

برابر کار بر امتداد وتر MoM است. بنا بر این کار بشکل منحنی بین نقاط Mo و M بستگی ندارد.

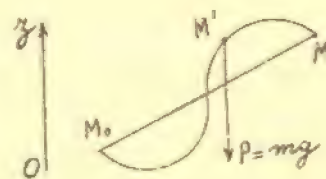
پس بمناسبت آنکه کار (F) موافق منحنی MoM تبدیل بکار (F) موافق تغییر مکان مستقیم الخط MoM میگردد میتوان کار را بدینصورت نوشت

$$TF = F \cos(F, MoM) \text{ وتر } MoM$$

و یا تصویر وتر MoM بر F $TF = F \times (F)$

تبصره - از رابطه اخیر میتوان

دستور کار ثقل P را بر متحرکی که روی منحنی غیر مشخصی مابین Mo و M سیر مینماید تعیین نمود. زیرا در اینصورت چنین خواهیم داشت



س ۴۱

$$F = mg \text{ (قدر مطلق وزن P از متحرك):}$$

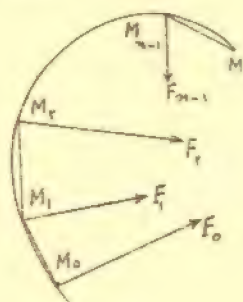
$$P = z - z_0 \text{ تصویر وتر } MoM \text{ در امتداد } P$$

بنابر آنکه z و z_0 ارتفاعات نقاط M و Mo باشند، بنا بر این حاصل میشود

$$TP = -mg(z - z_0)$$

۴۳. ثابا در حالتی که قوی متغیر باشند - کار قوه متغیر در تغییر مکان منحنی الخط.

۱- دستور تقریبی - در منحنی MoM متکسری مرکب از n ضلع MoM_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ محاط میکنیم، فرض میکنیم (F_0) و (F_1) و ... (F_{n-1}) حاملهای نمایش قوه متغیر باشد هنگامیکه نقطه اثر این قوی بر MoM_1 و M_1M_2 و ... و $M_{n-1}M$ قرار دارد



س ۴۲

$$F_0 MoM_1 \cos(F_0, MoM_1) + F_1 M_1M_2 \cos(F_1, M_1M_2) + \dots + F_{n-1} M_{n-1}M \cos(F_{n-1}, M_{n-1}M)$$

که آنرا بطور اختصار بصورت ذیل مینویسند

$$\sum_{k=0}^{n-1} F_k M_k M_{k+1} \cos(F_k, M_k M_{k+1})$$

اندازه تقریب کار مطلوب هر قدر n را بزرگتر انتخاب کنیم کمتر میگردد

ب- حدود - هنگامیکه عده اضلاع متکسر را بینهایت اضافه کنیم دوره متکسر بینهایت بمنحنی نزدیک میگردد و هر يك از جمل (Σ) بسمت حدی بینهایت کوچک میل مینماید (زیرا $M_k M_{k+1}$ بسمت صفر میل میکند) و در اینحال مجموع (Σ) بطور کلی بسمت حد معین و مشخصی میل خواهد نمود

ج- کار جزئی و کار مجموع - $[F_k M_k M_{k+1} \cos(F_k, M_k M_{k+1})]$ حد وقتی $M_k M_{k+1}$ بسمت صفر میل نماید (تغییر مکان بینهایت کوچک باشد)

به کار جزئی قوه (F) موسوم میباشد $(Te F)$ و یا (dT) .

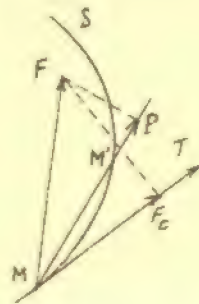
کار مجموع (۲۴) در تغییر مکان منحنی الخط MoM عبارت از حد مجموع (Σ) است وقتی n بینهایت ترقی کند.

۴۴. عبارات کار جزئی - ۱ - بحسب مؤلفه‌های مماسی قوه - متحرکی قوس SS را تحت اثر قوه متغیر (F) سیر مینماید فرض میکنیم M و M' مواضع متحرک در لحظات t و $t + \Delta t$ باشد در زمان Δt که پس از زمان t است قوه را ثابت فرض کرد، و بجای قوس MM' وتر MM' را قرار میدهم کار F عبارت است از:

$$F \cdot MM' \cdot \cos(F, MM') = \overline{MP} \cdot MM'$$

\overline{MP} تصویر قوه (F) بر وتر MM' است

برای آنکه عبارت کار جزئی معین گردد Δt را بسمت صفر میل میدهم در اینحال وتر MM' بسمت مماسی که از M بر منحنی رسم میگردد میل خواهد نمود و طول آن برابر قوس جزئی ds است MP بصورت مؤلفه مماسی قوه یعنی F_t در میاید بطریقه: $T_e F = F_t \cdot ds$



س ۴۳

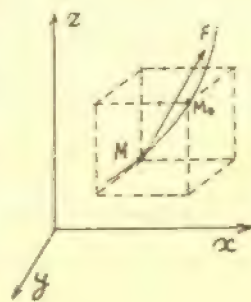
ثانیا عبارت تحلیلی - در لحظه t متحرک در نقطه $M(x, y, z)$ بوده

و تحت اثر قوه $(F) = (X) + (Y) + (Z)$

میباشد: در زمان جزئی dt متحرک مزبور حرکتی مانند ds خواهد کرد بسمبکه $(ds) = (dx) + (dy) + (dz)$ ترتیب عبارت است از حاصلضرب هندسی $(F)(ds)$ و مقدار آن چنین است.

$$T_e F = Xdx + Ydy + Zdz$$

۴۵. محاسبه کار مجموع یک قوه - اول - دستور کار - برای تعیین مقدار کار قوه

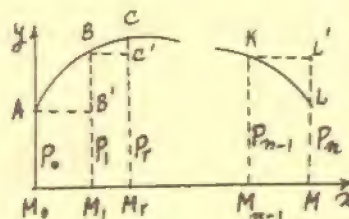


س ۴۴

متغیر در تغییر مکان منحنی الخط در دستور (Σ) چنین فرض مینمایم

$$P_0 = F_0 \cos(F_0, MoM_1)$$

$$P_1 = F_1 \cos(F_1, M_1, M_2)$$



$$P_n = F_n \cos(F_n, I, M_n - IM)$$

بعد در دستگاه محورهاى متعامد $Mo(x, y)$ بر محور طول اوتار $M_1, M_2, MoM_1, M_n - IM$ و ... و P_1, P_0 و ... $P_n - I$ نقل نموده و اندازه

س ۴۵

را برابر عرض آنها اختیار مینمایم کار قوه (F) بر منحنی MoM در (س ۴۲) تقریباً بصورت مساحت مستطیلات $MoM_1B'A$ و $M_1M_2C'B$ و و $M_nM_1L'K$ نموده میشود.

بنا بر این حد این مجموع را بدست میآوریم، وقتی عده این مستطیلات بینهایت زیاد شود دوره منکسر $KL'BC'C'KL$ بسمت منحنی $ABC \dots KL$ میل مینماید مساحت S محصور بین این منحنی و محوره‌های MoM و MoY و عرض ML عبارت از حد مجموع (Σ) خواهد بود و در نتیجه مقدار آن عبارت از کار (F) بر منحنی MoM است، مجموع مزبور بطور اختصار چنین میشود:

$$S = T_e F = \int_{Mo}^M P dx$$

P نمایش عرض نقطه غیر مماسی از منحنی $KL \dots ABC$ و dx طول بینهایت کوچک یکی از اوتار دوره منکسر (س ۴۲) است بفرض آنکه دوره مزبور بسمت منحنی MoM میل نماید.

ثانیا محاسبه کار - ۱ - طریقه حساب جامعه - چون P نمایش F_t یعنی تصویر F بر مماس منحنی MoM و dx نمایش قوس جزئی از همین منحنی میباشد، اگر F_t تابع اتصالی از قوس MoM باشد میتوان کار F را بوسیله استخراج جامعه (تابع اولیه) از دستور ذیل بدست آورد

$$T_e F = \int_{Mo}^M F_t(s) ds$$

همچنین است اگر F_t و ds هر دو تابع زمان باشند
در حالات دیگر طریقه ذیل را که بوسیله آن مقدار تقریبی کار معین
میگردد استعمال مینمایند.

ب - طریقه ترسیمی - در منحنی

M_0M منکسری مرکب از n وتر مساوی

محاط مینمائیم و فرض میکنیم

$$P_0 = F_0 \cos(F_0 \cdot M_0M_1)$$

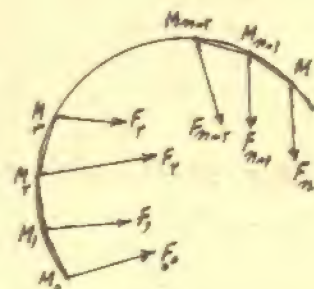
$$P_1 = F_1 \cos(F_1 \cdot M_1M_2)$$

$$P_n = F_n \cos(F_n \cdot MM_{n+1})$$

بعد در دستگاه محورهایی متعامد

M_0M_1 بر محور طول قطعات

M_1M_2 و M_2M_3 و $M_{n-1}M_n$ را برابر



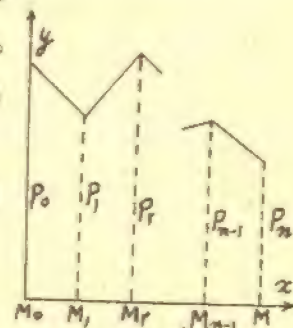
س ٤٦

طول یکی از اوتار محاط در منحنی مزبور جدا نموده و عرض هر يك
را به ترتیب برابر P_0 و P_1 و P_2 و P_n اختیار میکنیم، چون منتهای عرضها
را بهم وصل تمائیم n ذوزنقه که مجموع
مساحتشان تقریباً برابر کار F بر منحنی
 M_0M است نتیجه میگردد.

چون a را طول مشترك اوتار M_0M_1 و

امثال آنها فرض کنیم چنین خواهیم داشت

$$TF = a \left(\frac{P_0 + P_1}{2} + \frac{P_1 + P_2}{2} + \dots + \frac{P_{n-1} + P_n}{2} \right)$$



س ٤٧

$$TF = a \left(\frac{P_0}{2} + P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1} + \frac{P_n}{2} \right)$$

و یا

نتیجه عمل هر چه n را بزرگتر اختیار کنیم دقیقتر است

٤٦. آحاد کار - در سلسله C.G.S. واحد کار ارگ است (دین سانتیمتر)

ژول که واحد عملی کار است ١٠ برابر ارگ میباشد.

در سلسله متری واحد کار کیلوگرام متر است و آن کار قوه است که
يك کیلوگرم را با ارتفاع یکمتر بالا ببرد.

فرس ویو

٤٧. تعریف - حاصلضرب جرم نقطه مادی مفروض را در مجذور

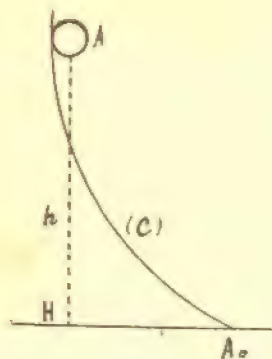
سرعت آن یعنی mv^2 را فرس ویو میگویند. حاصلضرب مزبور عبارت

از عدد است نه حامل، نصف این مقدار یعنی

$\frac{1}{2}mv^2$ را قوه ذخیره نقطه میگویند.

فرس ویو همواره بوسیله کیلوگرام متر

یا ارگ و یا ژول معین میگردد.



س ٤٨

٤٨. فرس ویو و کار - اهمیت فرس

ویو غالباً بواسطه رابطه ایست که با کار

دارد، فرض میکنیم کلوله یجرم M در نقطه

A با ارتفاع h فوق صفحه H واقع باشد؛ نقطه

مزبور بتایر وضع کنونی خود حاوی کاری

است که مقدارش برابر $T = Mgh$ میباشد.

جسم را در امتداد منحنی (C) رها میکنیم تا نقطه A_0 که در آن $h=0$

است برسد نقطه مزبور فاقد کار مذکور میگردد اما بناسبت آنکه در این

نقطه دارای سرعت v میباشد دارای فرس ویو Mv^2 خواهد بود.

٤٩. قضیه فرس ویو برای نقطه مادی - تغییر نیمه فرس ویو

نقطه مادی در حرکت بین لحظات t_0 و t برابر مجموع کارهای

جميع قوانینی است که بر این نقطه موقع تغییر مکان مزبور وارد میگردد

اولاً بدو مثال از حرکت را ذکر مینمائیم.

۱- حالتی که در آن متحرک بحرکتی مستقیم الخط متحرک بوده و تحت اثر قوه $F=mg$ که در امتداد و جهت تغییر مکان است واقع باشد.

فرض میکنیم متحرک از نقطه O در لحظه $t=0$ با سرعت v_0 حرکت نموده و در لحظه t با سرعت v بنقطه M برسد دو دستور $v=v_0+gt$ و $OM=x=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ را قیلا بدست آورده ایم: طرفین دستور اول را مجذور می نمایم نتیجه میشود:

$$v^2 = v_0^2 + 2v_0\gamma t + \gamma^2 t^2 = v_0^2 + 2\gamma(v_0 t + \frac{1}{\gamma} \gamma t^2) = v_0^2 + 2\gamma x,$$


$$\frac{v^2 - v_0^2}{\gamma} = \gamma x$$

و چون طرفین را در جرم m ضرب نمائیم:

$$\frac{mv^2}{r} - \frac{mv_0^2}{r} = m\gamma x = Fx = TF$$

از این دستور حکم قضیه نتیجه میگردد.

ب - حالتی که در آن متحرك وزین (بوزن P) در لحظه $t=0$ از نقطه O با سرعت v_0 در خلاف پرتاب شده، فرض میکنیم در لحظه t نقطه M وضع متحرك و v سرعت آن باشد دستور ذیل حاصل میگردد:



$$v^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0)$$

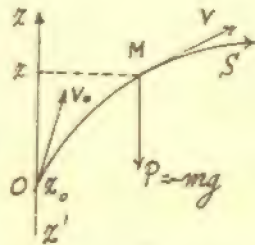
$$\frac{v^2}{r} - \frac{v_0^2}{r} = -g(z - z_0) \quad \text{و با}$$

$$\frac{mv^2}{\gamma} - \frac{mv_0^2}{\gamma} = -mg(z - z_0) = T.P. \text{ لا خسر.}$$

از این دستور نیز حکم قضیه استنباط میگردد

ثانیا۔ حالت کلی را ذکر مینمائیم۔

در لحظه t متحرک M بجرم m تحت تاثیر قوه متغیر (F) متجه
جميع قواى وارده قرار گرفته .



۱- شکل فاصله فرس ویو - اتحاد اصلی $(F) = (P)$ را در لحظه

۲. بر محاسن وارد بر مسیر تصویر مینمائیم نتیجه میشود

$$F_n = m\gamma_n$$

در معرّفه الحركات دستورهای $v = \frac{ds}{dt}$ و $\gamma_t = \frac{dv}{dt}$

را بدست آورده ایم بنابر این چنین خواهیم داشت

$$F_t = m \frac{dv}{dt}$$

۵۹

طرفین تساوی را در تغییر مکان جزیی ds که متناظر با زمان dt است ضرب مینماییم نتیجه میشود:

$$F_t ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = m v dv$$

$$F_t ds = T_e F_{t0} \left(1 - \frac{d}{2} \right) dT$$

$$mv dv = d \frac{mv^2}{2}$$

63

,

بنا بر این چنین خواهیم داشت

$$(v) \quad d\frac{mv^2}{2} = dT$$

این رابطه شکل فاصله قضیه فرس و یو است و آنرا باین عبارت بیان می‌نمایند
 بازاء نمو dt از زمان نیمه فرس و یو نقطه مادی برابر کار جزئی
 قوه وارد باین نقطه است.

ب - شکل جامعه فرس ویو - از طرفین دستور (۱) استخراج تابع

اولیه نموده مقدار آنرا بین دو زمان t_0 و t_1 که بازاء آنها سرعت متحرك برابر v_0 و v_1 است حساب میکنیم حاصل میگردد:

$$\int_{t_0}^t d\frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Big|_{t_0}^t = T$$

$$\frac{mv^2}{r} - \frac{mv_0^2}{r} = T$$

و

و از این رابطه حکم قضیه نتیجه میگردد

۵۰ - مورد استعمال - حرکت نقطه مادی وزینی که بوسیله مرکز ثبات O متناسب با فاصله اش جذب میگردد و آنرا بدون

سرعت اولیه در نقطه M_0 رها نموده اند.

مسیر خطی است که بر نقطه M_0

و مرکز جاذبه مرور مینماید،
 $\overline{O \quad F \quad M \quad M_0}$
 قوه جاذبه مزبور عبارت از

$$F = mk^2x$$

س ۵۲

x فاصله متحرك از مرکز جاذبه و k^2 مقدار ثابتی باشد، کار قوه عبارت است از:

$$T = -\frac{1}{2}mk^2(x^2 - x_0^2)$$

از قضیه فرس و بر نتیجه میگردد

$$v^2 = -k^2(x^2 - x_0^2) \quad \text{و یا} \quad v = \pm k\sqrt{x_0^2 - x^2}$$

و این مقدار سرعت متحرك مزبور است.

تمرینات

۵۷. نقطه مادی M بر امتداد بزرگترین شیب صفحه مایلی که با افق زاویه α دارد دارای انرش با اصطکاک است (جهت مثبت بطرف پایین است)

اولاً. در مسافت l از نقطه O_1 که در بالا قرار دارد و در نقطه O_2 رسیده و سرش در این موقع صفر میگردد

۱. $f = 0.05$ ضریب اصطکاک لغزش است زاویه α باید دارای چه شرطی باشد تا نقطه متحرك در O_1 متوقف نشود

ب. جزء نقطه بر ابریک کیلوگرم است شتاب نقل 9.81 متر میباشد بزاویه $\alpha = 40^\circ$ ۳۰ متر در ثانیه $v_0 = 1$ تصویب f_1 و کار متناظر با قوه اصطکاک را تعیین کنید

ثانیاً. زاویه α برابر مقدار ثابت 40° باقی میباشد، نقطه M از O در مبداء زمان با سرعت صفر رها شده و در لحظه $t=0$ متحرك دیگر M' بدون اصطکاک

بر امتداد Ox نیز با سرعت صفر رها گردیده مقصود تعیین لحظه t_1 است که در آن M یا M' باقی مینماید و مسافت متناظر با زمان مزبور

۵۸. عیله ماده چرخشی به شعاع 30 سانتیمتر را حرکت میدهد دقیقه ۵۰ دور آنرا میگردد تا قدرت متوسط عیله 8 کیلوگرم است مقصود تعیین انرژی است که در یک دقیقه انجام میدهد.

۵۹. نقطه مادی M بوزن P برابر يك کیلوگرم مجذوب نقطه ثابت A بوسیله قوه متناسب با فاصله AM میباشد، جاذبه در فاصله یکمتری برابر وزن P نقطه M است

اولاً. ثابت کنید نتیجه قوای P و F در جمیع اوضاع نقطه M بر نقطه B واقع در روی قائم A گذشته و متناسب با فاصله BM است - مقدار قوه جاذبه برای وقتی که BM برابر يك متر باشد چیست

ثانیاً. مقصود محاسبه کار نتیجه مزبور است وقتی نقطه M نیمدایره $B'MB$ بر مرکز A و شعاع AB را سیر نماید B' نقطه متقاطع B است

ثالثاً. مقصود محاسبه کار همین نتیجه است وقتی M بر قطعه مستقیم $B'B$ سیر نماید

۶۰. صفحه یو محصور متعامد Ox و Oy است داده شده

اولاً. نقطه مادی M در جهت مستقیم بر محیط دایره مرکز O و شعاع يك سانتیمتر سیر مینماید بر این نقطه قوه F متناسب با فاصله M از Ox اثر مینماید وقتی M در نقطه B است قوه مزبور برابر 1 دین میباشد و

جهت آن قسمی است که با MO زاویه که OM با Oy دارد ایجاد مینماید

مقصود تعیین کار جزئی قوه F در تغییر مکان MM' نقطه بر دایره است برای این منظور فرض میکنیم

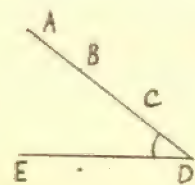
$$(OM, OM') = \alpha \quad \text{و} \quad MM' = \frac{1}{2}\alpha$$

مشتق کار را بحسب α تعیین نموده و کار F را وقتی M بر هر يك از چهار ربع AB و BA' و $A'B'$ و $B'A$ حرکت میکند معلوم کنید

ثانیاً. اگر فرض کنیم M تحت القوه F و وزن خود p دین باشد قسمی که بدون اصطکاک داخل دایره مزبور حرکت کند وضعت O_1 در امتداد قائم اختیار شود آیا تعادل نقطه M ممکن است، در صورت امکان اوضاع آنرا تعیین نمایید

۶۱. نقطه مادی M را بجزیم m بدون سرعت در نقطه A از صفحه مایلی که با افق زاویه θ را ایجاد کرده گذاشته اند، بزرگترین شیب متناظر با نقطه A است، B و C دو نقطه از همین خط باشد

بقسبکه $AB=BC=CD=l$ قسمت AB صاف است، اما صیقلی است قسمت BC ضریب اصطکاک f برابر $f = tgi$ دارد و قسمت CD دارای ضریب اصطکاک f برابر $f = 2tgi$ میباشد مقصود تعیین تغییرات فرس و انرژی است وقتی بر هر يك از تقسیمات حرکت کند



س ۵۴

۶۲ - جسمی ۲۰ کیلوگرمی از تحت بغوق با سرعت اولیه ۵۰۰ متر در ثانیه که با افق زاویه ۴۵° دارد پرتاب شده + مقصود تعیین کار قوای خارجی است که بر نقطه وارد شده آنرا در نقطه اوج متوقف سازند

۶۳ - دو چرخه سواری جاده افقی را با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت طی مینمایند و با این سرعت به قسمی از جاده میرسند که شیب آن در هر متر ۲ سانتیمتر تغییر مینماید از این لحظه بپیم دو چرخه سوار رکاب را نمیکردند

اولا - مقدار سرعت دو چرخه سوار وقتی بر این جاده ۵۰ متر سیر نمایند چقدر است
ثانیا - زمان سیر ۵۰ متر را تعیین نمائید بدوا مسئله را بفرض آنکه اصطکاک صفر باشد حل نموده سپس فرض میکنیم اصطکاک بصورت قوه یک کیلوگرمی در جهت مخالف سرعت وارد گردد

وزن دو چرخه و دو چرخه سوار ۸۰ کیلوگرم است شتاب نقل ۹.۸۱ آحاد طول و زمان متر و ثانیه میباشد

۶۴ - نقطه مادی وزنی در لحظه $t=0$ بر خط بزرگترین شیب صفحه بیل α پرتاب شده + سرعتش بطرف تحت متوجه بوده و مقدار عددی آن $\frac{1}{2}$ است ضرب اصطکاک f را است مقصود محاسبه سرعت در لحظه t است چه شرطی باید موجود باشد تا نقطه متوقف گردد فرض میکنیم شرط مقرر باشد + مقصود تعیین تغییرات زمان t است که مابین مبداء زمان و زمان توقف فاصله بگذرد بحسب g

مابین مفروضات کار عکس العمل صفحه را از مبداء زمان تا موقع توقف حساب کنید + چه سرعتی بدست آید از نقطه توقف تا بگذرد تا نقطه عزیمت بدوی خود رسیده و متوقف گردد

۶۵ - متحرکی بر افق OA سیر مینماید + طول $OA=l$ را در دو فاصله متوالی بطریق ذیل طی مینماید

در فاصله اول از O بدون سرعت اولیه حرکت کرده و دارای حرکت متشابه تغییر مسیره است و شتابش مثبت و برابر $\frac{1}{2}g$ میباشد

در فاصله دوم پس از زمان معلومی متحرك دارای حرکت متشابه تغییر مبسته شده و شتابش $\frac{1}{2}g$ - میگردد (مثبت است) سرعت متحرك در ابتدای فاصله دوم برابر سرعت آن در آخر فاصله اولی است

میدانیم متحرك باید در نقطه A بدون سرعت باشد مقصود تعیین ازمنه متناظر با دو فاصله مزبور و طول هر يك از آنها است

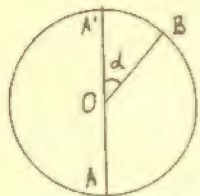
فرض آنکه متحرك بجرم m باشد چه قوانینی در دو فاصله بمتحرك وارد میشوند و اثر آنها چقدر است

مثال عددی: $g=9.81$ متر و $\frac{1}{2}g=4.905$ و $\frac{1}{2}g=4.905$ و اگر $m=1$ کیلوگرم

۶۶ - گلوله ای با سرعت v_0 در نقطه A محور قله اوج دایره قائم را رد شده + در چه نقطه از محیط دایره جدا میشود

۶۷ - دایره قائم مفروض است + چه سرعتی باید از نقطه حقیقی متحرك وزین A را به سمت دایره تا يك دور کامل ببرد

۶۸ - قطار را در نقطه حقیقی دایره قائم وارد داخل آن + سرعت اولیه v_0 را بدو میدهد



مس ۵۵

اولا - در نقطه B که شعاع نظر آن α باشد از نقطه A چه سرعتی باید بدو

ثانیا - فشاری را که در وضع B متحرك بر دایره وارد میشود حساب کنید

ثالثا - بفرض آنکه $OA=12$ متر + فرض کنیم سرعت اولیه است که در راه آن متحرك نقطه A یعنی

اوج دایره وارد گردد بدو بر آنکه فشار آن مثلا برابر

$\frac{1}{2}g$ و $g=9.81$ باشد + اصطکاک صفر و

فصل پنجم

استاتیک اجسام صلب آزاد

مرکز ثقل

۵۱ - چنانکه میدانیم وقتی یک دسته نقاط مادی بحال تعادل اند

حاملهای نمایش قوای خارجی وارد باین نقاط تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند +

برای آنکه چنین حالتی اتفاق افتد لازم و کافی است که نتیجه انتقالی

و عزم مجموع دستگاه نسبت يك نقطه بیاز صفر باشد + اما برای آنکه

حاملی صفر شود لازم و کافی است که تصاویر آن بر سه محور متعادل صفر باشد + بنابراین بیان آنکه دستگاهی معادل با صفر است باید

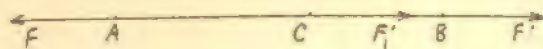
شش تساوی داشت +

برای برقراری شرایط فوق میتوان بجای دستگاه حاملهای نمایش قوای خارجی دستگاههای معادل با آنها قرار داد + بخصوص میتوان هر يك از

حاملهای نمایش قوای مزبور را بر محمل خود لغزش داد تا مثلاً میدانیم یکی از نقاط مادی دسته نقاط مقروض گردد.

اما پس از چنین عملی باید دانست که در حالت داخلی جسم تغییری حاصل میگردد، همچنین است اگر در صورت امتناع مبادی جمیع قوای خارجی را بر یکی از نقاط مادی مزبور قرار دهیم، اعمال نسبی نقاط دستگاه پس از چنین تبدیلی تغییر مینماید.

بهین جهت است که اگر در حالت مخصوص و ساده تیغه AB تنها



س ۵۶

تحت اثر دو قوه F و F' وارد بر نقاط A و B قرار گیرد، برای آنکه بحال تعادل باقی بماند لازم است قوای مزبور متقابل باشند. اگر بجای F' قوه F_1 را قرار دهیم یعنی F_1 را با اندازه BC بلغزانیم حالت تعادل تیغه بهم نمیخورد ولی قطعه CB تحت هیچگونه اثری نبوده بنا بر این حالت داخلی تیغه تغییر مینماید.

۵۲. اجسام لایتغیر - اجسام طبیعی - تعریف - جسم را لایتغیر میگوئیم وقتی مرکب از نقاط مادی باشد که فواصل نسبی آنها ضمن تاثیر قوای وارده تغییر ننماید.

تنها اختلاف بین این اجسام و اجسام هندسی مقروض در معرفه لحركات این است که در اینجا نقاط مشکل اجسام با جرم ملاحظه میشوند.

اجسام لایتغیر نیز مانند نقطه مادی وجود حقیقی ندارند. اجسام طبیعی تحت اثر قوای وارده ممکن است هرگونه تغییر شکل بدهند. مثلاً تغییر شکل بعضی از آنها مانند کائوچوك، قتر، نخ و امثال آنها بوسیله قوای ضعیف تر و برخی دیگر مانند سنگ، چوب و فلزات بواسطه اثر قوای قوی تر بمعرض ظهور میرسد.

اما زمانی که این تغییر شکل ها نامشهود باشند آنها را معدوم تصور میکنیم، اگر بر صفحه افقی صیقلی و مقاوم از مرمر گلوله از عاج را که بوسیله دوده اندود شده اند میاندازیم، چنان نقطه لنگه سیاه مستدیری روی میز مشاهده خواهیم نمود، در مقابل ملاحظه میکنیم که عرقیه کروی کوچکی از گلوله فاقد رنگ سیاه میباشد، بهین سبب است که میتوانیم بگوئیم در موقع تصادم گلوله با صفحه میز، گلوله و یا هر دو تغییر شکل هائی میدهند و نتیجه آن این است که در این موقع قسمت مشترك آنها نقطه نبوده بلکه سطح است، چنانچه قوای موجوده تغییر شکل کمتر از حدودی باشند بقسمی که جسم پس از رفع قوی بحالت اولیه خود عودت یمنماید گویند جسم در حالت ارتجاع است و اگر برخلاف قوای مزبور از حدود مذکور متجاوز گردند تغییر شکل جسم پس از رفع قوی قلا در یکی از قسمتهای آن مشهود خواهد بود برای اجسام نرم مانند خمیر و روغن و امثال آنها دوره ارتجاع وجود ندارد، اجسامی که شرایط تعادل آنها را تحقیق میکنیم اجسامی هستند که قوای وارده آنها را از دوره ارتجاع خارج مینماید و یا تغییر شکل آنها تحت اثر قوی غیر قابل ملاحظه است.

۵۳. اجسام آزاد - اگر جسمی طبیعی نسبت بزمین بحال تعادل باشد هرگز آزاد نیست بلکه همواره بواسطه اجسام دیگر غیر آزاد میباشد، اگر جسم S در نقطه A با جسم S' تماس داشته باشد تعادل را ممکن است با حذف جسم S' برقرار نمود باین طریق که در نقطه A قوه که حقیقه همان عکس العمل S' نسبت به S است اختیار کرد.

باین ترتیب همواره میتوان جسم را آزاد داشت مشروط باینکه بجای اجسامی که با آن تماس دارند قوای را که عکس العملهای آنها در نقاط تماس هستند قرار داد.

از شرایط تعادل جسم آزاد چنین مستفاد میشود که بعضی اوقات میتوان بجای قوای وارده بدان قوای دیگری اختیار نمود بدون آنکه در حالت

مکون یا حرکت جسم تغییری عارض گردد، نتیجه این است که شرط تعادل جسم غیر آزاد را نیز میتوان با ملاطفت قوای ارتباطی متعادل جسم آزاد راجع کرد.

حال میگوئیم اگر در حالت سکون یا حرکت جسم با طور کلی رشته نقاط مادی تغییری ندهیم، حالت خارجی جسم نیز تغییر نمی نماید، ولی این نکته را نیز باید متوجه بود که وقتی قوای مختلفه وارده بر جسمی را بقوای دیگری تبدیل میکنیم غالباً حالت داخلی آن تغییر می نماید.

۵۴- اصل کلی در استاتیک جسم - بجای آنکه در فضایی استاتیک جسم صلب را مرکب از نقاط مادی فرض کنیم که فواصل نسبی آنها لا یغیر اند، بهتر است که بر سبیل خاصیت دیگری که خود تعریف کردیم از جسم صلب است آنها را ششاسیم، این اصل نیز مانند سایر اصول چراغ تعالی مبتنی بر تجربه و مشاهده است.

برای آنکه حالت خارجی جسم صلبی با افزایش یا کاهش دو قوه تغییر ننماید لازم و کافی است که قوای مزبور متقابل باشند.

بخصوص اگر بدو نقطه A و B از جسم صلبی دو قوه یافزائیم و حال تعادل باقی بماند لازم و کافی است که قوای مزبور دارای خط اثر AB بوده به علاوه مقدارشان مساوی و جهتهای مختلف باشد.



ص ۵۷

اولین نتیجه اصل فوق این است که همواره ممکن است قوه F وارده بر نقطه A از جسمی را قوه F' وارده بر نقطه دیگر B متعادل یا F تبدیل نمود، بدون آنکه در حالت خارجی جسم تغییری حاصل گردد، زیرا همواره ممکن است قوای F' و F'' را که اولی متعادل F و دومی متقابل

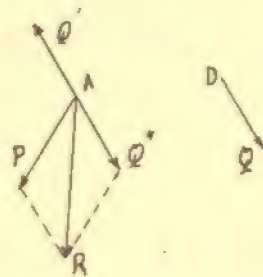
F' است جسم اضافه نموده و پس از آن بدون آنکه تغییری در حالت خارجی جسم حاصل شود دو قوه متقابل F و F'' را حذف کرد و بالاخره قوه F را قوه F' تبدیل نمود.

۵۵- تبایل قوای وارده بر جسم - ۱ - تبدیل یک قوه به قوه که بر نقاط اختیاری (و اقوا) از جسمی وارد شوند، A, B, C را سه نقطه غیر واقع بر یک استقامت از جسمی اختیار میسازیم بنا بر استدلالی که راجع بحاصلها (کتاب اول، نمره ۳۰ قضیه ۱) کردیم میتوان بدون آنکه حالت خارجی جسم تغییر نماید دو قوه معلوم F را سه قوه که بنقاط A, B, C وارد شده اند تبدیل نمود.

تبصره - در حالت مخصوصی که نقطه M در صفحه AB قرار دارد و نقاط A, B, C واقع باشد و ضمناً F بر این صفحه منطبق باشد و سبیل نفوذش، نقطه تعلیق قوه F را از صفحه AB خارج نموده و نقطه دیگری از جسم که غیر واقع در این صفحه باشد قرار داد، چنانچه جسم غیر از M نقطه دیگری بر امتداد خط AM داشته باشد، این عمل غیر ممکن میشود ولی به طریقی وقتی انشاق میافتد که جسم را فقط از یک ورقه مستوی فرض سازیم، در اینصورت ملاطفت میکنیم که تعادل چنین جسمی وقتی برقرار است که قوای وارده در صفحه آن واقع باشند زیرا اگر A منتهی جمیع قوای خارجی وارده بر نقطه M از ورقه مزبور باشد شرط تعادل نقطه مزبور این است که قوه F متقابل یا منتهی عکس عملهای شاق مختلفه ورقه باشد اما قوای اجزای همه در صفحه ورقه واقع اند پس منتهی آنها نیز در همین صفحه بوده لازم میاید F نیز در این صفحه واقع باشد.

ب - تبدیل دو قوه که یکی از آنها بر نقطه اختیاری از جسم وارد شود سه قوه را قوای وارده جسمی را سه قوه AM, BV و CW که بر سه نقطه A, B, C وارد شده اند تبدیل نمود و چنانکه میدانیم (کتاب اول، نمره ۳۰ قضیه ۲) همواره بدون آنکه در حالت خارجی جسم تغییری

حاصل گردد میتوان قوای مزبور را بدو قوه که یکی از آنها مثلا P بر نقطه اختیاری A و دیگری Q که بر نقطه دیگری مانند D وارد شده تبدیل نمود .
ج - تبدیل یک قوه وارد به نقطه اختیاری از جسم و یک زوج .
میتوان بدو آنکه تغییری در حالت خارجی جسم رخ دهد جمیع قوای



وارد بدن را یک قوه واحد که بر نقطه معین A در جسم وارد شده و یک زوج مبدل ساخت ، زیرا همواره میتوان قوی را بدو قوه P و Q تبدیل نمود حال چون قوای متقابل Q' و Q'' را که اولی با Q تشکیل زوج میدهد بنقطه A از جسم وارد کنیم حالت

خارجی جسم تغییر نمیکند ، سپس P و Q'' را به نتیجه آنها یعنی R تبدیل مینماییم . در نتیجه قوای وارد به قوه R و زوج $(Q' \text{ و } Q)$ تبدیل میشوند .

۵۶ - شش شرط لازم برای تعادل یک دسته نقاط مادی در مورد جسم صلب کافی میباشد - فرض میکنیم جسم صلبی بحال سکون باشد میتوان بر آن قوای خارجی که تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند وارد نمود ، حال ثابت میکنیم جسم تحت اثر این قوی بحال تعادل باقی میماند . میتوان بدو آنکه تغییری در حالت خارجی جسم ایجاد شود قوای مزبور را بدو قوه P و Q که بدو نقطه A و B وارد شده اند مبدل ساخت این دو قوه باید تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند بنا بر این باید متقابل باشند اما جسم بدو بحال سکون بود پس در ضمن ورود قوای P و Q نیز بهین حالت باقی میماند .

حالت مخصوص - ۱ - جسمی که تحت اثر سه قوه است - چنانکه میدانیم (کتاب اول نمره ۳۵ قضیه) شرط تعادل جسمی تحت اثر سه قوه چنین است :

باید خطوط اثر قوای مزبور در یک صفحه واقع باشند ، مجموع مقادیر جبری تصاویر قوای مزبور بر دو محور واقع در این صفحه برابر صفر گردد ، مجموع مقادیر جبری عزیمهای قوی نسبت به محور عمود بر این صفحه مساوی صفر شود .

ب - جسمی که تحت اثر قوای واقع در یک صفحه است - بطور کلی قوای وارد بر جسمی را که در یک صفحه واقع باشند میتوان یک قوه واحد موسوم به منته بدل ساخت .

شرایط تحلیلی تعادل در اینصورت چنین است : مجموع مقادیر جبری تصاویر قوی بر دو محور واقع در صفحه آنها و همچنین مجموع مقادیر جبری عزیمهای آنها نسبت بمحوری عمود بر صفحه مزبور برابر صفر است .

مرکز ثقل

۵۷ - اگر A_1 و A_2 و A_3 و ... نقاط مادی و m_1 و m_2 و m_3 و ... و m_n جرمهای این نقاط باشند ، فرض میکنیم نقاط مزبور تحت اثر قوایی باشند شتاب آنها همواره همسنگ حاملی مانند γ باشد ، قوای مزبور موازی و متحد البجهت خواهند بود . مرکز قوای متوازی مزبور نقطه G است قسمی اگر قوای f_1 و f_2 و ... و f_n وارد بنقاط معروض را بقوی دیگری متناسب با همین قوی ولی در جهت تریکری بدل کنیم نقطه G ثابت میماند .

نقطه G را مرکز ثقل دسته نقاط A_1 و A_2 و ... و A_n میگویند . برای یافتن این نقطه بهتر آنست که نقاط مقروض را دسته دسته کرد فرض میکنیم نقاط را سه دسته S_1 و S_2 و S_3 تقسیم کرده باشیم قسمیکه G_1 و G_2 و G_3 مراکز ثقل آنها باشد و M_1 و M_2 و M_3 جرم مجموع نقاط هر یک از دسته ها فرض شود .

قوای وارد بنقاط S_1 دارای منته M_1 میباشد که بنقطه G_1 وارد شده

و همچنین قوای وارد نقاط A_1 و A_2 و ... و A_n مرکز شده اند. مرکز سه قوه مزبور همان مرکز ثقل اجرام A_1 و A_2 و ... است.

حال ملاحظه میکنیم مرکز دو قوه که بر نقاط A_1 و A_2 وارد شده نقطه مابین A_1 و A_2 است و همچنین مرکز دو قوه که بر نقاط B_1 و B_2 گذشته نقطه مابین B_1 و B_2 و ... و بالاخره تا نقطه A_n از اینجا چنین نتیجه میشود که مرکز ثقل یکمت نقطه داخل دایره یا سطحی است که شامل جميع نقاط معلوم واصل بین نقاط مذکور باشد.

برای تعریف مرکز ثقل جسم میتوان فرض کرد که قوای وارده بر نقاط مختلف آن همان اوزان این نقاط باشند.

۵۸ - مختصات مرکز ثقل جسم - فرض میکنیم m_1, m_2, \dots, m_n وزن n نقطه مادی مشکل جسمی بوده و $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ وزن آن باشد و $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ مختصات نقاط مادی مزبور و (x, y, z) مختصات مرکز ثقل جسم اختیار شود. برای محاسبه مختصات نقطه (x, y, z) قضیه عزم قوای متوازیه را نسبت به یک صفحه ABC (تصویر ۱) که از مرکز ثقل و موازیه را نسبت میدادیم. نیست صفحه ABC نتیجه میشود:

$$P.x = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$$

و یا پس از تقسیم طرفین بر g حاصل میشود

$$Mx = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n$$

و بالاخره:

$$x = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k = M}$$

و همچنین

$$y = \frac{\sum m_k y_k}{M} \quad z = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

مرکز ثقل خطوط

۵۹ - مرکز ثقل خط - جسمی بشکل خط مثلاً رشته فلزی اختیار مینمائیم. جسم مزبور را وقتی متشابه الاجزاء میگوئیم که جرم قوسی از آن یعنی m متناسب با طول همین قوس یعنی l باشد بعبارة اخرى بین جرم و طول آن و جرم يك قطعه بطول واحد از آن یعنی d رابطه $m = dl$ برقرار باشد. مرکز ثقل خط متشابه الاجزاء به d بستگی ندارد چه اگر d را به d' تبدیل نمائیم مثل این است که جرم جميع نقاط را در نسبت $\frac{d'}{d}$ ضرب کنیم یعنی بالاخره وزن این نقاط را در همین مقدار ضرب نمائیم. پس مرکز ثقل چنین نقاطی تغییر نمی نماید.

بدیهی است اگر خطی دارای مرکز تقارن باشد مرکز ثقل آن بر همین نقطه است همچنین وقتی دارای محور یا صفحه تقارن باشد مرکز ثقل آن بر این محور یا این صفحه قرار دارد. بنابر این مرکز ثقل هر قطعه خط بر وسط آن بوده و مرکز ثقل محیط دایره بر مرکز دایره است و مرکز ثقل قوس دایره بر قطری که بوسط قوس مرور مینماید قرار دارد.

مرکز ثقل محیط مثلث - فرض میکنیم p وزن يك واحد طول از محیط مثلث ABC باشد بعبارة اخرى p مساوی حاصلضرب وزن مخصوص خطی مثلث در شتاب g فرض شود.

وزن ضلع AB برابر pAB بوده و مرکز ثقل آن بر وسط AB یعنی F منطبق است بنا بر این مرکز ثقل مطلوب عبارت است از مرکز قوای متوازیه متحدالجهتی است که بر اوساط اضلاع مثلث وارد شده و مقادیرشان بترتیب pAB و pBC و pCA باشد مرکز دو قوه وارد بنقاط E و F نقطه H واقع بر خط EF است بقسیمی که:

$$(HE) \times p \times AC + (HF) \times p \times AB = 0$$

و یا

$$\frac{HE}{HF} = \frac{AB}{AC}$$

اما چون

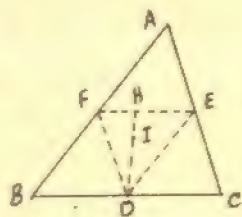
$$AC = 2DF \text{ و } AB = 2DE$$

$$\frac{HE}{HF} = \frac{DE}{DF}$$

از رابطه اخیر چنین مستفاد میشود که H موقع نصف الزاویه D از مثلث EDF است عبارت آخری: مرکز ثقل محیط مثلث مفروض ABC مرکز دایره محاطی مثلثی است که از وصل اواسط اضلاع مثلث مفروض حاصل میگردد.

مرکز ثقل خط غیر مشخص - چنانچه در خط غیر مشخصی منکسری

محاط کنیم، مرکز ثقل این منکسر وقتی قوسهای متناظر با ضلع آن بسمت صفر میل نماید، بسمت حدی میل میکند که آنرا مرکز ثقل خط مزبور میگویند، ضمناً این نکته را متذکر میشویم که اگر وضع محاط کردن منکسر را تغییر دهیم مرکز ثقل خط تغییر نمینماید



س ۵۹

۶۰ - قضیه اول کولدن - مساحت سطحی که از دوران خطی مستوی حول محوری واقع در صفحه خود ایجاد میگردد مساوی است بحاصل ضرب طول خط مزبور در طول محیط دایره مسیر مرکز ثقل آن.

فرض میکنیم $AM_1M_2 \dots M_n - B$ منکسر محاط در قوس AB باشد که حول محور XX' واقع در صفحه خط دوران بینماید.

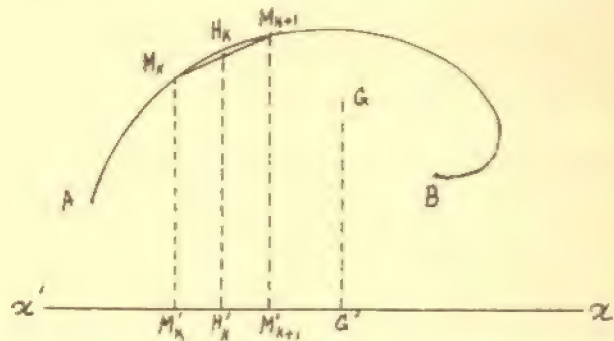
وتر M_kM_{k+1} ضمن دوران سطح مخروط ناقصی ایجاد مینماید که مساحت آن برابر حاصل ضرب طول محیط دایره مسیر نقطه H_k و وسط قطعه مزبور است در طول مولد، چون H_k' را موقع عمود وارد از نقطه H_k بر محور فرض کنیم مقدار مساحت سطح مزبور چنین است

$$2\pi H_k H_k' \times M_k M_{k+1}$$

بدین ترتیب مساحت سطح حاصل از دوران منکسر مزبور حول محور فرض آنکه H را وسط قطعه AM_1 و H' را تصویر این نقطه بر محور فرض کنیم چنین میشود

$$s = 2\pi [H'H \times AM_1 + H_1'H_1 \times M_1M_2 + \dots + H_n'H_n \times M_n - B]$$

مقدار داخل کرشه عبارت از مجموع عزمای اوزان اضلاع منکسر مزبور نسبت بصفحه ایست که بر XX' عمود بر صفحه منکسر مرور نماید



س ۶۰

اما این مجموع برابر عزم وزن منکسر نسبت بهمین صفحه است بقرض آنکه مرکز قوه مزبور نقطه G یعنی مرکز ثقل منکسر باشد، چون G' را تصویر G بر XX' فرض کنیم حاصل میشود:

$$s = 2\pi L \times GG'$$

حال فرض میکنیم اضلاع منکسر محاطی بسمت صفر میل نمایند طول قوس AB بسمت حدی میل مینماید که همان حد / منکسر است همچنین حد نقطه G میباید و بالاخره حد سطح دوار بسمت سطح حاصل از دوران خط مفروض میل مینماید بنا بر این

$$S = 2\pi GG' \times L$$

مورد استعمال - چنانچه مقدار سطح حاصل از دوران قوس AB معین باشد میتوان فاصله مرکز ثقل مزبور را از محور دوران معین نمود و اگر بالعکس مرکز ثقل قوس AB معین باشد بوسیله حکم فوق مساحت سطح دوار را میتوان حساب کرد، اینک چند مثال ذکر مینمائیم.

۱- مرکز ثقل قوس دایره - چنانچه AB قوسی از دایره بمرکز O ولی کمتر از نیمه محیط باشد و C وسط قوس و xy محور دوران و بموازات AB اختیار شود چون سطح حاصل از دوران قوس AB عبارت از منطقه کروی است پس چنین خواهیم داشت

$$S = 2\pi \times AB \times R$$

مرکز ثقل قوس AB بر قطر OC که محور تقارن قوس است قرار دارد

بنا بر قضیه کولدن نتیجه میشود:

$$S = 2\pi \times OG \times AB$$

از مقایسه دو تساوی معلوم میشود:

$$OG = \frac{R \times AB}{AB} \text{ قوس}$$

میتوانت تساوی فوق را بصورت

$$OG = \frac{AB}{a}$$

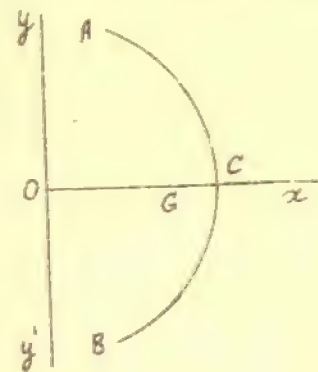
a مقدار زاویه AOB بحسب رادیان باشد

ب- مساحت سطح حلقه - حلقه

از دوران دایره حول محوری واقع در صفحه آن ایجاد میشود، اگر C مرکز دایره و R شعاع آن و O موقع عمودی باشد که از C بر محور فرود میاید سطح حاصل از دوران دایره حول محور چنین است

$$S = 4\pi^2 \times R \times OC \text{ و یا } S = 2\pi \cdot OC \times 2\pi R$$

اگر ملاحظه کنیم که $2\pi OC$ محیط مدار متوسط حلقه است نتیجه میشود



که سطح حلقه حاصل ضرب طول محیط دایره مولد آن است در طول محیط مدار متوسط.

۶۱- مرکز ثقل سطح مستوی - جسمی بشکل ورقه مستوی فرض میکنیم جسم مزبور را در صورتی متحدالاجزاء میکنیم که جرم يك جزء از آن متناسب با مساحت آن قطعه یعنی s باشد بعبارة اخرى بين آنها رابطه $m = sd$ برقرار شود قسمی که d مساوی وزن مخصوص جسم یعنی برابر جرم قطعه از ورقه باشد که مساحتش مساوی واحد مساحت است بهمان دلیل که راجع بخط ذکر شد معلوم میشود که مرکز ثقل سطح متحد الاجزاء فقط بستگی بشکل دوره که آنرا محدود مینماید دارد نه نوع ماده مشکله آن و بهمین جهت است که میگویند مرکز ثقل سطح مستوی

اگر سطحی مستوی دارای مرکز تقارن باشد این نقطه مرکز ثقل آن سطح است مثلاً مرکز ثقل سطح دایره همان مرکز دایره است.

قطر - خط D را نسبت باوتار موازی با d وقتی قطر سطح محدود بوسیله دوره C میگویند که جمیع اوتار محصور در منحنی C و بموازات d بوسیله خط D بدو قسمت مساوی تقسیم شوند.

وقتی سطح مستوی محدودی

دارای قطر باشد مرکز ثقل آن

بر همین خط قرار دارد.

بدون آنکه حکم فوق استدلال

کنیم نکته ذیلرا متذکر میشویم

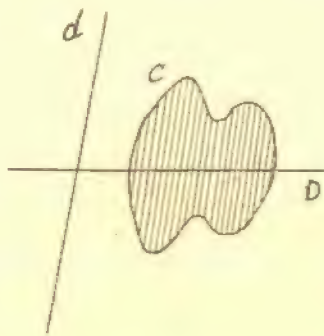
ورقه مستوی را بوسیله خطوطی

بموازات d بتقسیمات عدیده

تجزیه مینمائیم قسمی که هر يك

از تقسیمات حاصل بشکل خطی

باشد، مرکز ثقل هر يك از این قطعات بر وسط آنها یعنی بر قطر D واقع



است وزن قطعات مزبور قوای متوازی و متحد الجبهی میباشد که بنقاط مختلفه D وارد شده اند مرکز آنها نیز بر همین خط است، این نقطه مرکز ثقل ورقه است.

بخصوص اگر سطحی مستوی محور تقارن داشته باشد، این خط قطری از شکل است که جمیع امتدادهای عمود بر خود را نصف میکند.

۶۳ - مرکز ثقل سطح مثلث - قضیه - مرکز ثقل سطح مثلث نقطه تلاقی میانه های آن است. زیرا هر يك از این میانه ها نسبت بضلعی که بر آن وارد شده اند قطری از سطح مثلث اند پس نقطه تلاقی آنها مرکز ثقل سطح است بنا بر این مرکز ثقل مثلث بر یکی از میانه ها و بفاصله ثلث همین میانه از وسط ضلع متناظر با آن قرار دارد.

تبصره - سه قوه مساوی موازی و متحد الجبهت

وارد بر رؤس مثلث ABC فرض میکنیم، p را

مقدار مشترك آنها اختیار میکنیم مرکز قوای وارد

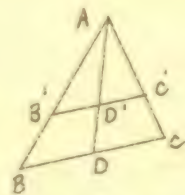
بنقاط B و C بر وسط BC یعنی نقطه D بوده و

مقدار متوجه آنها برابر 2p میباشد بنا بر این مرکز قوای مفروض بر میانه AD قرار دارد.

همین ترتیب معلوم میشود که مرکز قوای مزبور بر میانه دیگر و در نتیجه بر محل تلاقی میانه ها واقع است. بقسمی که میتوان گفت:

مرکز ثقل سطح مثلث بر مرکز دستگاهی منطبق است مرکب از سه قوه متوازی و مساوی و متحد الجبهت که بسه راس مثلث وارد شده باشند.

۶۴ - مرکز ثقل سطح چهار ضلعی محدب - وزن چهار ضلعی ABCD مرکب از اوزان مثلثات ABD و BCD است، اوزان این مثلثات به نسبت مساحات آنها است ولی چون در يك ضلع مشترك اند مساحات آنها متناسب با ارتفاعات وارد بر این ضلع مشترك است ولی ارتفاعات فواصل



۶۳

نقاط A و C از BD میباشند پس نسبت مزبور مساوی نسبت قطعات AE و CE

میباشد، بنا بر این تعیین مرکز ثقل

چهار ضلعی منجر میشود به تعیین مرکز

قوای متوازیه متحد الجبهت و متناسب

با طولهای AE و CE بقسمی که بنقاط

g و g' یعنی مرکز ثقل مثلثات ACD و ABD

مرور نموده باشند

فرض میکنیم E' قریبه E نسبت بنقطه

M وسط قطر BD باشد مرکز ثقل

مثلث AEE' بر ثلث میانه AM واقع

است بنا بر این بر مرکز ثقل مثلث

۶۴

ABD منطبق است همچنین نقطه g مرکز ثقل مثلث CEE' است

اما مرکز ثقل سطح ACE' باین ترتیب معین میشود که مرکز دستگاه

مرکب از اوزان دو مثلث AEE' و CEE' را تعیین نماییم که بنقاط g و g'

مرور کرده و متناسب با مساحات این مثلثات میباشند. این اوزان از طرف دیگر

متناسب با ارتفاعات وارد بر نقاط C و A بقاعده E'E و بنا بر این متناسب

با قطعات AE و CE نیز میباشند. پس مرکز ثقل مثلث ACE' بر مرکز

ثقل چهار ضلعی منطبق است

یعنی مرکز ثقل سطح چهار ضلعی محدب بر مرکز ثقل سطح مثلثی

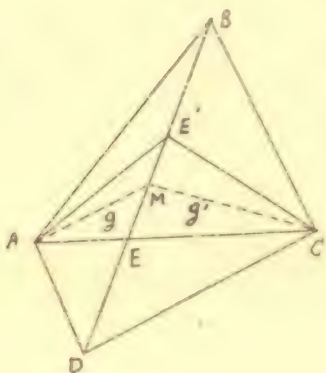
منطبق است که يك ضلعش قطری از چهار ضلعی و راس مقابل این

قاعده قریبه نقطه تلاقی اقطار نسبت بوسط قطر دیگر باشد.

۶۴ - مرکز ثقل سطح دوزنقه - بوسیله طریقه فوق میتوان مرکز

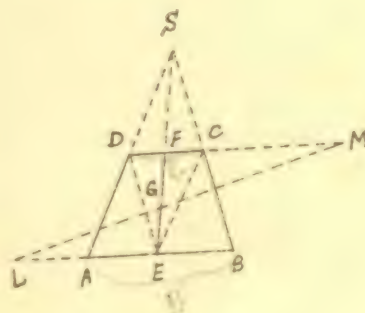
ثقل سطح دوزنقه را تعیین نمود ولی بنا بر خاصیت این شکل مرکز ثقل آن

کمی سهلتر معین میگردد.



قاعده AB را برابر B و قاعده CD را برابر B اختیار می‌نمائیم و فرض میکنیم F و E اوساط قواعد مزبور باشند وزن ذوزنقه را مرکب از اوزان مثلثات ADE, BCE و CED اختیار

می‌نمائیم، اوزان مزبور متناسب با مساحات این مثلثات میباشد ولی چون همه در ارتفاع باذوزنقه مشترك اند مساحتشان متناسب با قواعد آنها AE, BE و CD میگردد قسمی که برای تعیین مرکز ثقل سطح ذوزنقه میتوان بجای اوزان



مثلثات قوائی موازی و مساوی با اعداد $\frac{B}{4}$ و $\frac{B}{4}$ قرار دارد بنا بر آنکه بر مرکز ثقل مثلثات نظیر خود وارد شده باشند و هر يك از این قوی را نیز ممکن است سه قوه متساوی وارد بروس مثلثات متناظر تبدیل نمود، چون قوای مزبور را با یکدیگر ترکیب کنیم معلوم میشود باید قوای متوازی وارد بنقاط A و B و C و D و E را با یکدیگر ترکیب نمود باین ترتیب: دو قوه وارد بروس B و A با کمیت $\frac{B}{4}$ و يك قوه وارد براس E با کمیت $\frac{B}{4} - \frac{b}{4}$ و دو قوه وارد بروس D و C با کمیت $\frac{B}{4} + \frac{b}{4}$ ، سه قوه اول دارای متجه برابر $\frac{2B}{4} + \frac{b}{4}$ میباشد که بنقطه نا وارد شده و متجه دو قوه اخیر مساوی $\frac{B}{4} + \frac{2b}{4}$ بوده و بنقطه F وارد گردیده، بالاخره از تالیف دو قوه اخیر که بنقاط E و F وارد میشوند مرکز ثقل سطح ذوزنقه یعنی نقطه G بر قطعه خط EF معین میگردد بقسمیکه

$$\frac{GE}{GF} = \frac{B+2b}{2B+b}$$

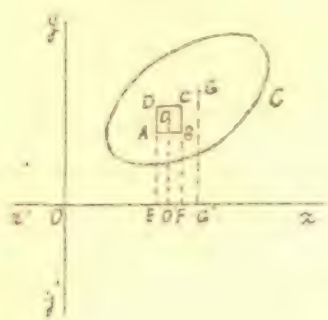
میتوان نقطه G را بدین طریق تعیین نمود: هر يك از دو قاعده را در جهت مخالف

قاعده دیگری به طولی برابر همین قاعده امتداد میدهم خط LM واصل بین دو انتهای این خطوط EF را در نقطه مطلوب G تلاقی مینماید طریقی که:

$$\frac{GE}{GF} = \frac{B+2b}{2B+b} \quad \text{یا} \quad \frac{GE}{GF} = \frac{EL}{FM}$$

قبصره - میتوان مستقیماً نیز اثبات کرد که مرکز ثقل ذوزنقه بر خط EF قرار دارد زیرا خط اخیر قطر ذوزنقه نسبت بهر يك از دو قاعده است قضیه دوم گولدن - حجم حاصل از دوران سطحی مستوی حول محوری واقع در صفحه آن بنابر آنکه از آن عبور نکرده باشد مساوی است بحاصل ضرب مساحت سطح مزبور در محیط مسیر مرکز ثقل این سطح.

فرض میکنیم C منحنی حد سطح مستوی مفروضی و A'X محوری واقع در صفحه سطح مزبور اختیار شود بقسمیکه دوره سطح را تلاقی ننماید:



داخل سطح محصور در منحنی C و مرئی چنان بنا میکنیم که اضلاعش بترتیب موازی و عمود بر A'X باشد: ضمناً قبول میکنیم که اگر ضلع این مربع سمت صفر میل نماید: ۱ - سطح مستور از مربع هائی که داخل دوره C واقع اند سمت سطح داخلی C میل مینماید ب - حجم حاصل از دوران مربعهای مزبور بسمت: حجم حاصل از دوران

سطح میل میکند ج - مرکز ثقل مجموعه مربعها بر مرکز ثقل سطح منطبق میگردد. حجم حاصل از دوران مربع ABCD تفاضل حجم دو استوانه است که در ارتفاع مشترك میباشد و دستور این حجم چنین است

$$(۱) \quad \pi EF(ED - EA)(ED - EA) \quad \text{و یا} \quad \pi EF(ED^2 - EA^2)$$

اگر O مرکز مربع مزبور و O' وسط EF باشد مجموع ED + EA برابر ۲OO' میگردد و تساوی (۱) بدینصورت در میآید

$$۲\pi OO' \times AB \times BC$$

عبارت فوق برای حاصل ضرب 2π است در عزم قوه نسبت به صفحه مار بر $x'x$ موافق امتداد z عمود بر این صفحه بنا بر آنکه قوه مزبور به نقطه O وارد شده و مقدارش برابر مساحت مربع $ABCD$ باشد، پس مجموع احجام حاصل از دوران مربعهای داخلی سطح مفروض مساوی حاصل ضرب 2π است در عزمهای اوزان مربعات بفرض آنکه وزن واحد سطح برابر واحد قوه باشد اما مجموع این عزمها مساوی عزم وزن سطحی است که از مربعهای مزبور مستور است قسمیکه اگر x را برابر مساحت سطح مزبور و G را مرکز ثقل آن اختیار نماییم حجم حاصل چنین میشود

$$V = 2\pi \cdot gg' \times S$$

حال فرض میکنیم ضلع مربع سمت صفر میل نماید حجم V سمت V و سطح S سمت S میل کرده و GG' بر GG' منطبق میگردد بطریقیکه دستور حجم چنین خواهد شد

$$V = 2\pi \cdot GG' \times S$$

مورد استعمال ۱ - مرکز ثقل سطح نیمدایره - محور تقارن
نیمدایره AB بر شعاعی واقع است که عمود بر همین قطر باشد، حجم حاصل از دوران نیمدایره حول قطر AB بر $\frac{2}{3}\pi R^3$ است از طرفی بموجب قضیه فوق حجم حاصل غارت است از $2\pi OG \times \frac{2}{3}\pi R^3$ مساوی این

$$2\pi OG \times \frac{\pi R^2}{2} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

$$OG = \frac{4R}{3\pi}$$

یعنی

ب - حجم حلقه - چون دایره حول محوری واقع در صفحه خود دوران نماید حجمی احداث مینماید که بموجب قضیه دوم گویان مساحتش چنین است:

$$2\pi a \cdot \pi R^2$$

فرض اینکه a فاصله مرکز دایره از محور بوده و ضمناً از R بزرگتر باشد مقدار فوق برابر حاصل ضرب سطح دایره مولد حجم است در محیط مدار متوسط سطح دوار

مثال - مرکز ثقل سطح منطقه کروی - سطح شکل را مار

بر محور $x'x$ اختیار میکنیم که عمود بر دوائر حد منطقه است، سطح مزبور کره را در دایره عظیمه و صفحات حد منطقه را در اوتار AA' و BB' تلاقی مینماید. بر $x'x$ جهتی را مثبت اختیار کرده و مرکز کره را مبدا فرض میکنیم. فواصل مراکز دو قاعده منطقه را از O برابر c و d اختیار مینماییم بنا بر آنکه $c > d$ ، منطقه را با صفحه عمود بر $x'x$ که به نقطه M بطول x

از این محور گذشته قطع مینماییم مرکز ثقل سطح منطقه محصور بین دوائر بمراکز M و C است قسمیکه طول این نقطه تابعی از x خواهد بود. صفحه قاطع دیگری عمود بر محور اختیار میکنیم که در نقطه M_1 بطول x_1 این خط را قطع کرده باشد قسمیکه $x_1 > x$ و S_1 و S را سطوح منطقه های متناظر با نقاط M و M_1 و X و X_1 را طول های مراکز ثقل این سطوح فرض میکنیم. وزن

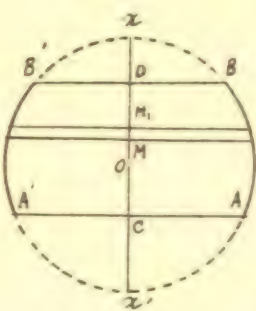
واحد سطح منطقه را برابر واحد قوه اختیار میکنیم، وزن منطقه S_1 عبارت از منجمه وزن های منطقه S و منطقه $S_1 - S$ است که محصور بین صفحات متناظر با نقاط M و M_1 میباشد. قضیه عزم حامل را نسبت به صفحه برای اوزان مزبور بموازات $x'x$ مراعات میکنیم، بفرض آنکه صفحه ماخذ بر O گذشته و عمود بر $x'x$ باشد چنین نتیجه میشود:

$$(1) \quad S_1 X_1 = SX + (S_1 - S)u$$

بر آنکه u طول مرکز ثقل منطقه بازتفاضل MM_1 اختیار شود. بنا بر تصویر مذکور در نمره ۵۷، u مابین x و x_1 قرار دارد. در تساوی (۱) SX را طرف اول نقل کرده طرفین را بر $x_1 - x$ تقسیم میکنیم نتیجه میشود

$$(2) \quad \frac{S_1 X_1 - SX}{x_1 - x} = \frac{S_1 - S}{x_1 - x} u$$

حال فرض میکنیم x ثابت مانده x_1 سمت آن میل نماید طرف اول



ص ۶۷

تساوی (۲) بطرف مشتق حاصل ضرب SX میل خواهد کرد. سمت x میل نمایند ولی $S = S_1 - S_2$ مساحت سطح منطقه بار تقاع $x - x_1$ است اگر شعاع کره باشد حاصل میشود

$$S = 2\pi R(x_1 - x)$$

بنا بر این چنین نتیجه میشود

اما طرف ثانی عبارت از مشتق $\pi R x^2$ است بقسمیکه

$$(SX)' = 2\pi R x$$

بنا بر این : $S = 0$ و $x = c$ حاصل میشود $k = -\pi R c^2$

$$SX = \pi R(x^2 - c^2)$$

$$S = 2\pi R(x - c)$$

پس بالاخره

$$x = \frac{x+c}{2}$$

چون x را مساوی c فرض کنیم صولی مرکز ثقل منطقه $\frac{c+d}{2}$ میگردد

یعنی بر وسط قطعه واصل بین مراکز قواعدش قرار دارد

چنانکه ملاحظه میشود مانند مسئله فوق میتوان مرکز ثقل بعضی سطوح را تعیین نمود همچنین ممکن است مرکز ثقل بعضی حجم را تعیین ساخت

۶۷ - مرکز ثقل حجم - جسم مقروض را وقتی مشابه الاجزاء

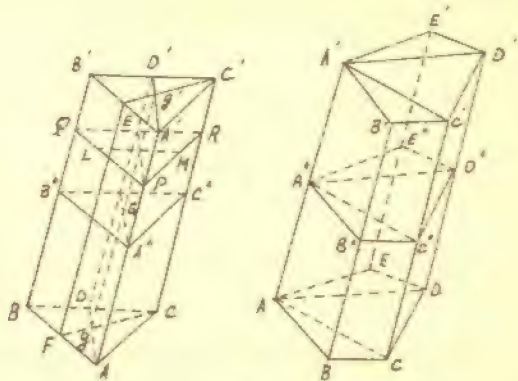
مگویند که جرم جزئی از آن یعنی m متناسب با حجم این جزء یعنی v باشد قسمیکه بین آنها رابطه $m = kv$ برقرار گردد بنا بر آنکه k عدد ثابتی بوده یعنی مساوی وزن مخصوص جسم باشد یعنی k برابر جرم جزئی از جسم است که حجمش مساوی واحد اختیار شده

مرکز ثقل جسم مشابه الاجزاء بستگی وزن مخصوص آن نداشته بلکه فقط بشکل آن بستگی دارد و همچنین جهت است که میگوئیم مرکز ثقل حجم اگر جسمی مرکز یا محور تقارن داشته باشد مرکز ثقل آن بر این نقطه یا این خط مطلق است

گویند جسمی محدود سطح S موافق امتداد h دارای صفحه قطری P است هرگاه جمیع امتدادهای موازی با h از سطح S بوسیله صفحه P نصف شوند. اگر جسمی دارای صفحه قطری باشد مرکز ثقل آن بر همین صفحه قرار دارد. زیرا میتوان جسم را مرکب از منشورهای بی نهایت کوچکی تصور نمود که پالهای جایی آنها موازی امتداد h باشد مرکز ثقل هر یک از این منشورها که در حد بختی منجر میشوند بر وسط این خطوط یعنی روی صفحه P قرار دارد پس لازم میاید که مرکز جمیع قوای تماس اوزان منشورها نیز در صفحه P واقع گردد

بخصوص اگر جسمی دارای صفحه تقارن باشد مرکز ثقل جسم بر همین صفحه است

۶۸ - مرکز ثقل حجم منشور - قضیه - مرکز ثقل منشور بر وسط خطی واقع است که بین مراکز ثقل دو قاعده اش را وصل مینماید.



۶۸

۱ - منشور مثلث القاعده است. فرض میکنیم $ABC A'B'C'$ منشوری مثلث القاعده باشد صفحه که بر AA' میان مثلث ABC از نقطه h مرور مینماید صفحه قطری جسم موافق امتداد BC است پس مرکز ثقل جسم بر این صفحه قرار

دارد همین طریق معلوم میشود مرکز ثقل جسم بر صفحه واقع است که بر CC' و میانه CF مرور مینماید و در نتیجه نقطه مطلوب بر فصل مشترک این دو صفحه یعنی خط gg' قرار دارد که مراکز ثقل دو قاعده را یکدیگر وصل مینماید ولی چون از طرف دیگر صفحه که بر اواسط یالهای جسم یعنی نقاط A'' و B'' و C'' مرور میکند نیز صفحه قطری جسم موافق امتداد یالها است پس مرکز ثقل منشور بر وسط gg' قرار خواهد داشت بعبارة اخرى بر مرکز ثقل مثلث $A''B''C''$ منطبق است.

ب. منشور غیر مشخص است - فرض میکنیم قاعده منشور کثیر الاضلاع محدب $ABCDE$ باشد، آنرا بمثلثات تجزیه مینمایم معلوم میشود مرکز ثقل منشور مرکز قوای است که بمراکز ثقل مثلثات $A''D''C''$ و $A''E''D''$ و $A''C''B''$ و متناسب با حجم منشورهایی که بقاعده همین مثلثات میباشند وارد شده اند اما میتوان گفت که قوای مزبور متناسب با مساحات این مثلثات است پس مرکز ثقل جسم بر مرکز ثقل کثیر الاضلاع $A''B''C''D''E''$ منطبق است یعنی حکم محقق میگردد.

مورد استعمال - چون در استوانه منشوری محاط کنیم معلوم میشود که مرکز ثقل استوانه نیز وسط قطعه است که بین مراکز شکل دو قاعده آنرا وصل مینماید.

۶۹ - مرکز ثقل حجم هرم - قضیه - مرکز ثقل حجم هرم بر خطی واقع است که راس آنرا بر مرکز ثقل قاعده وصل مینماید و این نقطه از قاعده بفاصله یکچهارم همین خط قرار دارد.

۱. هرم مثلث القاعده است. $ABCD$ چهار وجهی مفروض است صفحه که بر AD و نقطه K وسط BC مرور مینماید صفحه قطری جسم موافق امتداد BC است بقای این مرکز ثقل جسم بر این خط قرار دارد از طرف دیگر مرکز ثقل جسم بر صفحه قطری دیگری که بر AC و نقطه E

وسط DB میگذرد واقع میباشد پس در نتیجه بر فصل مشترک این دو صفحه یعنی خط Ag واقع است که راس A را بر مرکز ثقل مثلث BCD وصل مینماید، بهمین ترتیب معلوم میشود مرکز ثقل جسم بر خط Dg' واقع است که نقطه D را بر مرکز ثقل مثلث ABC وصل کرده از تشابه مثلثات Ggg' و GDA نتیجه میشود:

$$\frac{Gg}{GA} = \frac{gg'}{AD}$$

اما بنا بر تشابه مثلثات Kgg' و KDA حاصل میشود

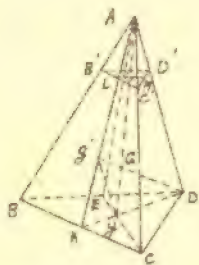
$$\frac{Kg'}{AD} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{Gg}{GA} = \frac{1}{3}$$

یعنی نقطه G در راس AO قرار دارد. میتوان گفت که G مجانس g بوده و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است.

هرم غیر مشخص است - میتوان قاعده آنرا بمثلثات تجزیه نمود و جسم را بچند هرم تبدیل نمود مرکز ثقل هر یک از این اهرام بر مرکز ثقل مثلثی واقع است که بموازات قاعده جسم و بفاصله $\frac{1}{3}$ ارتفاع از قاعده رسم شود بنا بر این مرکز ثقل هرم نیز بر مرکز ثقل مقطعی از جسم منطبق است که از راس بفاصله $\frac{1}{3}$ ارتفاع قرار داشته است.

مورد استعمال - چون در قاعده مخروطی کثیر الاضلاعی محاط کنیم معلوم میشود مرکز ثقل مخروط نیز بر خطی قرار دارد که راس را بر مرکز ثقل قاعده وصل مینماید و فاصله آن از مرکز ثقل قاعده برابر $\frac{1}{3}$ قطعه واصل است.



تقریبات

۶۹. رشته فلزی دور n واحد طول مثلثی متساوی الاضلاع ضلع a و دایره شعاع r ساخته ایم دایره را درون مثلث قسمی قرار میدهند که با دو ضلع مثلث مماس گردد
اولا. مرکز ثقل دستگاه مرکب از دایره و مثلث را تعیین کنید
ثانیا. اگر شعاع دایره برقی کند وضع مرکز ثقل چگونه تغییر می نماید
۷۰. مرکز ثقل منگسر منظمی را تعیین کنید و بوسیله آن مرکز ثقل قوس دایره و قطاع منصوب منگسر منظم و قطاع مستقیم را بیست آورید
۷۱. مرکز ثقل قوس پنج را معلوم کنید در حالت مخصوصی که قوس مزبور برابر یک حلقه یا دو حلقه و ... است مرکز ثقل را معین سازید
۷۲. شش ضلعی منظمی مفروض است دوس شش ضلعی بترتیب $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ و $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ باشد سوز یک از دوس و زنی متناسب با اندیس آن وارد شده است کنید مرکز ثقل این اوزان بر خط A_1A_6 بوده و از A_1 فاصله $\frac{5}{7}$ ضلع شش ضلعی قرار دارد
۷۳. بر محوری n نقطه $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ و A_7 موازی a و $2a$ و ... و na مفروض است و عدد مثلث مفروض است n مرکز ثقل دستگاه را تعیین کنید فرض آنکه n عدد مزبور اولاً متناسب با اندیس های خود آنها متناسب معذور این تعداد باشد
۷۴. مرکز ثقل دستگاه را که مرکب از شش یک چهار وجهی است تعیین نمایید
۷۵. مرکز ثقل کثیر الاضلاعی را تعیین کنید که سه ضلعش شکلی نصف منظم منظم باشد و یک ضلع دیگر آن قوس دایره باشد و این دایره همی نیمه منظم است
۷۶. بر اضلاع مثلث قائم الزاویه در خارج هر یک از ضلع ضلعی قرار داده ایم اولاً مرکز ثقل 12 خط حاصل را تعیین نمایید ثانیاً مرکز ثقل سطحی که از مثلث و سه مربع ایجاد میگردد معین نمایید (فواصل مرکز ثقل را از اضلاع (اوپه قائمه حساب کنید)
۷۷. مرکز ثقل جعبه مکعب شکل را که بدون در است تعیین نمایید فرض آنکه قطر جدارش غیر قابل ملاحظه باشد
۷۸. گویائی متساوی الساقین و قوس دایره 20 متر است سوراخی مستقیم در آن شعاع 10 متر شده است که مرکز ثقل از دو ضلع را با فاصله 4000 متر قرار دارد بمقدور تعیین مرکز ثقل گویا است فرض آنکه منشأ اجزا بوده و همهجا بیک قطر باشد
۷۹. از مثلث متساوی الاضلاع ضلع n که منشأ اجزاء است قوس مستدیری شعاع r بر داشته اند که مرکز ثقل O بر ارتفاع AH واقع بوده و از مرکز ثقل مثلث فاصله

- d قرار دارد مقصود تعیین مرکز ثقل «فصل شده» سطح است مقدار r را بقسمی تعیین کنید که مرکز مزبور ضلع BC نزدیکترین فاصله را دارا شود آیا ممکن است r را بقسمی اختیار کرد که مرکز ثقل مزبور فاصله O نسبت به Q باشد
۸۰. از شش ضلعی منظم $ABCDEF$ مرکز O مثلث OAB را بر میداریم مرکز ثقل بقایه سطح را تعیین نمایید همین ترتیب اگر مثلثات OAB و OBC را بر داریم مرکز ثقل سطح باقی را تعیین نمایید
۸۱. در مربع $ABCD$ نقطه مانند M را قسمی تعیین کنید که اگر از سطح مربع مثلث AMB را بر داریم مرکز ثقل بقایه سطح همین نقطه M گردد
۸۲. مرکز ثقل دایره مثلث شکلی را که از آن مثلث $MB'C'$ را بر داشته ایم تعیین کنید فرض آنکه اضلاع این مثلث موازات مثلث اول و از آنها یک فاصله باشد در چه حالتی مرکز ثقل مضروب دایره مثلث $MB'C'$ است
۸۳. سطحی متساوی را موافق افتاداتی بر صفحه تصویر کشیدیم تست کنید تصویر مرکز ثقل سطح مفروض بر مرکز ثقل تصویر آن منطبق است
مورد استعمال. مرکز ثقل نیمه منظم منسوب بقوس دایره را بقدر اقل آن را تعیین کنید
۸۴. فرض میکنیم G و O' مراکز ثقل قواعد B و B' از منشوری باشد صفحه تمام یالهای جانبی منشور را قطع کرده GG' نقطه تلاقی این صفحه و GG' است اولاً ثابت کنید که مرکز ثقل مقطع این صفحه است
ثانیاً ثابت کنید حجم منشور تقصی که محصور درین صفحه قطع و قاعده B است متغایر منشوری است بقاعده B فرض آنکه این جانبی آن مسدود و موازی BB' باشد
ثالثاً مرکز ثقل منشور تقصی را تعیین کنید
۸۵. مرکز ثقل سطح چهار وجهی را تعیین نمایید
۸۶. مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه در زاویه A مفروض است خطی مانند MN موازات AB بقسمی رسم کنید که مرکز ثقل قوس بقایه $ABNM$ از ضلع AB فاصله معین d قرار گیرد (بحث)
۸۷. ثابت کنید که مرکز ثقل چهار ضلعی منظم مرکب از مرکز قوای متساوی و متوازی منطبق است که بر دوس و محل تلاقی قطار چهار ضلعی وارد شده باشد قوای وارد بر دوس متعادل بوده و قوس وارد بر O در جهت مخالف آنها است
۸۸. مرکز ثقل قطعه از دایره محصور بین دو وتر متوازی یک دایره و قوس دایره را تعیین کنید
۸۹. مرکز ثقل هرم تقصی را با دو قاعده متوازی تعیین کنید
۹۰. جسمی است مجوف بشکل کره بر مرکز و شعاع معین قسمت خالی آن نیز

کره بر کر و شعاع معین است خط المکررین دو کره نیز معلوم است مقصود تعیین مرکز ثقل این جسم میباشد چنانکه جسم را بر نقطه A از سطح خارجی آن بیاورند بقسبکه زاویه بین OA و OO' معین باشد مقصود محاسبه زاویه شعاع OA با قائم است ۹۱ - از جسم مکعب شکلی هرمی را که راسش مرکز و قاعده اش یکی از وجوه آن است بر داشته اند مرکز ثقل حجم حاصل تعیین کنید

۹۲ - مرکز ثقل قطاع کروی را که از دوران قطاع دایره OAB حول OA حاصل میگردد تعیین کنید

۹۳ - مرکز ثقل قطعه کروی را که محدود به دو صفحه متوازی است تعیین کنید مورد استعمال - مرکز ثقل نیمکره

۹۴ - اوله قائم بصول يك متر و مقطع يك سانتیمتر مربع مفروض است وزن آن ۳۰۰ گرم است آنرا از ارتفاع مبدئی دراز جبهه کرده اند مرکز ثقل دستگاه را تعیین کنید چقدر از جبهه را باید خالی کرد تا مرکز ثقل دستگاه بقدر کفایت پائین بیاید

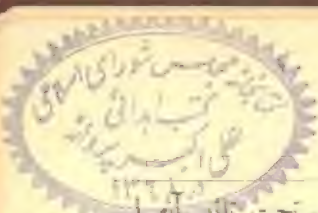
۹۵ - جسمی بچهار ضلعی محدب ABCD که نسبت بقطر BD قریبه است محدود میباشد و این قطر قائم است از طرف دیگر محدود به قائم EF و صفحه که از حرکت افتد متحرک بر دایره ABCD و قائم EF ایجاد میگردد میباشد
اولا حجم جسم را تعیین کنید ثانیاً مرکز ثقل حجم جسم را معین سازید

فصل ششم

استاتیک اجسام غیر آزاد - ماشینهای ساده

قوای مستقیم و عکس العملها - جسم صلب S خواه در حال تعادل و خواه در حال حرکت باشد ممکن است مصادف با اجسام دیگر گردد، چنانچه A یکی از نقاط تماس جسم S با جسم دیگر S' فرض شود میدانیم میتوان بدون آنکه در حالت جسم تغییری عارض گردد بجای عکس العمل جسم S' نسبت به جسم S قوه مانند R ده بنقطه A وارد شده قرار دارد، این قوه عبارت از يك قوه ارتباطی است

این نکته را نیز نباید فراموش کرد که اگر A' نقطه از جسم S' باشد که با نقطه A از جسم S تماس دارد بقا بر تساوی عمل و عکس العمل نقطه A نیز بر



A' عملی متقابل با R وارد میسازد قوای خارجی که جسم تحت تأثیر آنها است عبارتند از اولاً: قوای مستقیم ثانیاً قوای ارتباطی و بنا بر شرایط تعادل یکدسته نقاط مادی:

وقتی جسم غیر آزاد در حال تعادل است حاملهایی که نمایش قوای مستقیم و قوای ارتباطی میباشند تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهند.

مثال - جسم سیالی (مایع یا گاز) بحال تعادل فرض میکنیم، جرم معینی از این جسم را مانند M محدود بسطح S فرض میکنیم، قوای که جرم مزبور مستقیماً تحت اثر آنها است عبارتند از اوزان نقاط همین جرم، اوزان مزبور دارای نتیجه مانند P یعنی وزن جرم M هستند ده بنقطه G مرکز ثقل جرم وارد شده

قوای ارتباطی عکس العملهای نقاط تماس سطح S هستند با نقاطی ده جرم مزبور در آنها محصور است ولی چون بقرض تعادل بر قرار است عکس العملهای مزبور نیز دارای نتیجه هستند ده متقابل با وزن P است

حال اگر بجای جرم M در مایع جسم دیگری ده کاملاً فضای جرم M را فرا بگیرد قرار دهیم اینجسم از طرف مایع تحت اثر همان عکس العملها واقع خواهد شد بنا بر این:

جسم مزبور تحت اثر قوه قائمی است که از تحت بفوق ممتد بوده و مقدارش برابر وزن مایع هم حجم جسم میباشد و امتدادش از مرکز ثقل جسم مزبور عبور میکند و این قانون ارشیدس است

بعضی ارتباط های ساده - نقطه ثابت - برای آنکه جسمی مانند S بتواند حول نقطه ثابتی متحرک باشد، بر جسم ضمیمه کروی شکلی تعبیه مینماید و آنرا داخل فیورفتگی بهمان شکل قرار میدهند بطرقی که کاملاً در آن محصور گردد، با چنین ارتباطی اگر اصطکاک را صفر فرض کنیم عکس العملهای جدار حفره بر ضمیمه کروی شکل جسم بر امتداد قائم

هائی واقع است که از نقطه مختلفه سطح کره رسم گردد بنا بر این حاملهای نمایش قوای مزبور از مرکز کره عبور نموده در نتیجه متجه آنها نیز از نقطه ثابت O مرور خواهد کرد، متجه مزبور را که عکس العمل نقاط مختلفه حفره است **عکس العمل نقطه ثابت** میخوانند، چنین وضع ارتباط بندرت در مائشینها ملاحظه میگردد، بعدها خواهیم دید که برای تعادل اهرم لازم است که يك نقطه از دستگاه ثابت بماند.

محور ثابت دوران - وقتی دو نقطه A و B از جسمی را ثابت فرض کنیم جسم فقط میتواند حول محور AB حرکت وضعی نماید، حال اگر جسم S حول محور AB متحرك باشد عکس العملهای A و B از محور بر جسم دوقوه هستند که بهمین نقاط از جسم وارد شده اند در جمیع حالاتیکه اصطکاک صفر است عکس العملها بر امتداد قائم های سطح دوار میباشند بنا بر این محور سطح دوار را که همان محور AB است تلافی خواهند کرد

محور دوران و لغزش - اگر جسمی دارای محور دوران و لغزش است اگر خطی مانند A از جسم همواره بر خط ثابت D نسبت بدستگاه مفروض منطبق باشد.

اگر استوانه مصمتی فرض کنیم که درون استوانه و جوفی بهمان شعاع دارای حرکت باشد عکس العملها در صورت صفر بودن اصطکاک قائم بر سطح استوانی بوده یعنی محور را تلافی خواهند کرد

لغزش - در موردی که اصطکاک صفر باشد عکس العملها قائم بر سطح لغزنده میباشند بخصوص عکس العملها قائم بر امتداد انتقال مستقیم الخطی هستند که جسم موافق آن سیر مینماید (پیچ و مهره)

اتکاء - در حالتی که جسمی بتواند بر جسم دیگر بدون اصطکاک لغزه عکس العملها قائم بر سطح تماس اند، مثلا در موقعی که دانه های دو چرخ از مقابل یکدیگر عبور مینمایند

ساده ترین حالت وقتی است که سطح اتکاء مستوی باشد، در اینصورت همواره با ثبوت اصطکاک عکس العملها قائم بر این صفحه اند به علاوه نسبت بصفحه باید در همان جهتی ممتد باشند که جسم قرار دارد

اصل موضوع استاتیك جسم صلب غیر آزاد - وقتی جسم A' بحال تعادل است، قوای خارجی یعنی قوایی که مستقیما بدن اثر مینمایند و عکس العملهای وارد بر جسم تشکیل دستگاهی مساوی صفر میدهند، تعادل مزبور بوسیله شش معادله (F) بیان میگردد که مقادیر معلوم و مجهول را یکدیگر ربط میدهند.

بمسئله میتوان فهمید که معادلات (F) بطور کلی برای تعیین عکس العملها کفایت مینمایند، از امثله که قبلا مذکور فکاد معلوم میشود که عموما بینهایت عکس العمل موجود است، مثلا در موردی که کشانی بر دیزی قرار میدهیم عکس العمل نیز بر نقاط بینهایتی از کشاب وارد میگردد که آنها را نمیتوان بوسیله شش معادله مزبور تحصیل نمود بلکه باید در موارد معین فرضهای مخصوصی کرد، مثلا در اینصورت باید فرض کرد عکس العمل هائی که بر سطح تماس وارد میگردد دارای متجه هستند که متناسب با مساحت همین سطح میباشند، ولی با تمام این مقدمات از معادلات (F) فقط در بعضی حالات مخصوص میتوان عکس العملها را حساب کرد

در هر صورت برای تعادل جسم A لازم است که معادلات (F) دارای جواب باشند، چنانچه معادلات مزبور جواب نداشته باشند جسم بحال تعادل نخواهد بود

اما اگر معادلات مزبور دارای جواب باشد آیا جسم تحقیر بحال است یا نه، جواب این سوال از اصل ذیل معین میگردد

هرگاه عکس العملهای ارتباطی ممکن الحصول باشند بقسمی که اگر جسم A را تحت اثر این عکس العملها و قوای مستقیم وارد بدان آزاد فرض کنیم بحال تعادل باقی بماند جسم مزبور تحقیرا در حالت تعادل است -

عکس‌العملها را وقتی ممکن الحصول می‌گوئیم که از جهت کمیت امتداد مشخص باشند. بطور کلی اصل موضوع ذیل را در استاتیک یک‌دستگاه قبول می‌نماییم:

یک‌دسته جسم مفروض است، این دستگاه تحت اثر قوای مستقیم وقتی بحال تعادل است که اگر برای هر یک از اجسام دستگاه قوایی مرکب از عکس‌العملهای ممکن الحصول ترتیب دهیم بقسمی که جسم مزبور تحت اثر این قوی و قوای مستقیم وارد بدن آزاد باشد جسم بحال تعادل باقی بماند.

جسمی که دارای نقطه ثابت است - اهرم

قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلبی که دارای نقطه ثابت است تحت اثر قوای مستقیم بحال تعادل باشد این است که نتیجه قوای مزبور از نقطه O بگذرد.

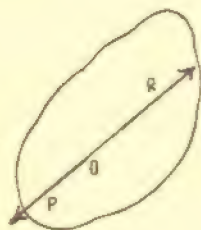
اولا شرائط لازم است - زیرا اگر جسم تحت اثر قوای مستقیم بحال تعادل باشد این قوی با عکس‌العمل P نقطه ثابت تشکیل دستگاهی معادل صفر خواهند داد.

قوة R که متقابل با P است باید معادل با مجموع قوای مستقیم باشد زیرا اگر بجای قوای خارجی مجموع آنها یعنی R را قرار دهیم در حالت خارجی جسم تغییری حاصل نمی‌کند.

ثانیا شرائط کافی است. اگر قوای مستقیم وارده جسم دارای نتیجه مانند R باشند قسمی که امتدادش به O بگذرد، قوة A که متقابل با قوة R است با قوای مستقیم تشکیل دستگاهی معادل با صفر میدهد این قوة عبارت از عکس‌العمل ممکن الحصول است.

بنابر این جسم تحقیقا بحال معادل خواهد بود میتوان گفت شرط آنکه قوای مستقیم دارای نتیجه مار بر نقطه O باشند این است که عزم

مجموع قوی نسبت به نقطه O صفر باشد این شرط کافی نیز هست زیرا در اینصورت قوای مزبور معادل با نتیجه انتقالی خود تست بنقطه O میشوند



ص ۷۰

اهرم - برای برداشتن تخته سنگی بوسیله میله AB انتهای میله را تحت تخته سنگ گذاشته و زیر میله جسمی که نسبتا مقاوم باشد مانند C قرار میدهند، چون بر نقطه A فشاری وارد آورند

تخته سنگ بلند میشود: استعمال اهرم در عملیات عادی خیلی معمول است از نقطه نظر مکانیکی اهرم جسم صلبی است که دارای یک نقطه ثابت

مانند O میباشد، جسم مزبور تحت اثر دو قوه مستقیم است.

قدرت P که بر نقطه A وارد میگردد و مقاومت Q که بنقطه

B اثر مینماید وزن اهرم را در

مقابل قوای مزبور صفر فرض

مینماییم برای اینکه هرم تحت

اثر قوای وارده بحال تعادل بماند لازم و کافی است که عزم مجموع

قوی نسبت به نقطه O صفر باشد عزم قوای P و Q حاملهائی است که بر

صفحات مار بر O و خط اثر قوای مزبور عمود میباشد

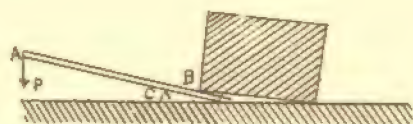
بنابر این صفحات مزبور باید منطبق باشند و در نتیجه لازم است

که خطوط اثر قوی در صفحه مار بر O واقع شوند علاوه اگر OB' و OA'

فواصل نقطه O از خطوط اثر قوی باشد از تساوی بین عزما نتیجه میشود:

$$OA' \times P = OB' \times Q$$

فواصل نقطه O را از خط اثر قوی بازوهای اهرم مینامند

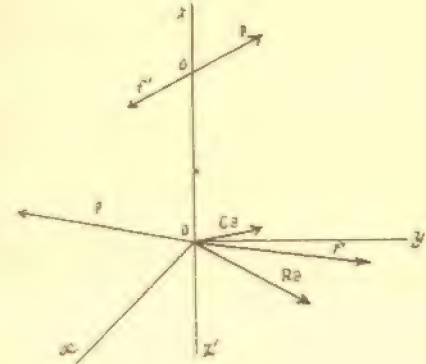


ص ۷۱

بمحور و $\sum N_r$ مجموع عزیمهای عکس العملها نسبت باین خط باشند، مجموع $\sum N_a + \sum N_r$ برابر صفر است ولی چون عزیمهای عکس العملها نسبت بمحور صفر میباشد پس لازم میاید $\sum N_r = 0$.

ثانیا شرایط کافی است - فرض میکنیم مجموع عزیمهای قوای مستقیم وارد بر جسم صلبی نسبت بمحور ثابت OO' برابر صفر باشد، اگر OG_a و OR_a عزیم مجموع و منتجه انتقالی قوی نسبت به نقطه O از محور باشند بنا بفرض نتیجه میشود که

حامل OG_a باید بمحور عمود باشد، صفحه P که بر O مرور کرده و بر OG_a عمود است شامل محور خواهد شد، بر نقطه O' مفروض بر محور قوه P' را در صفحه P مرور میدهم بقسمی که خط اثر آن عمود بر محور باشد کمیت و جهت این



سر ۷۴

حامل بقسمی است که عزیمش نسبت به نقطه O برابر OG_a شود، اگر P قوه باشد که بر نقطه O وارد شده و مقدارش مساوی فضل هندسی OR_a بر P' اختیار گردد دستگاه قوای P و P' معادل با قوای مستقیم وارد جسم خواهد بود.

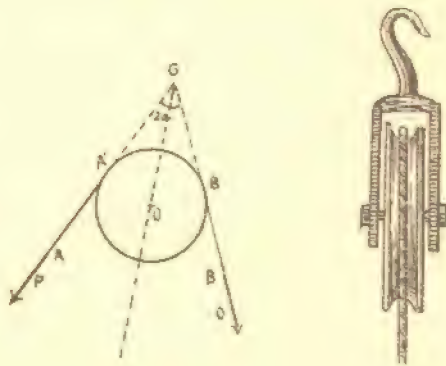
میتوان بوسیله دو قوه q و q' که بر ترتیب با قوای P و P' متقابل اند تعادل را برقرار ساخت قوای q و q' عکس العملهای ارتباطی ممکن الحصول پس بنا بر اصل استاتیک اجسام صلب غیر آزاد جسم بیحال تعادل است پس در حالت مخصوصی که جسم فقط تحت اثر یک قوه باشد برای اینکه

عزم این قوه نسبت به محور صفر شود باید در صفحه مار بر محور قرار داشته باشد بعبارة اخرى خط اثر قوه باید محور را تلاقی نماید.

قرقره و چرخ چاه

۷۷ - قرقره ثابت - قرقره استوانه دوار است که ارتفاع آن در مقابل شعاع قاعده اش نسبتاً کوچک است. سطح جانبی این استوانه دارای فرو رفتگی است که در آن میتوان رشته را عبور داد بر یکی از دو سر این ریسمان مثلاً بر نقطه A قدرت و بر سر دیگر آن یعنی نقطه B مقاومت وارد میگردد. قرقره میتواند تهاحول محوری متحرک باشد برای این منظور در قرقره مدخلی متحدالمرکز با قاعده استوانه ایجاد نموده در آن میله استوانه شکلی که شعاعش برابر شعاع مدخل است قرار میدهند. دو منتهای این میله در قطعه موسوم بدو شاخه نصب است دو شاخه مزبور دارای قلابی است که میتوان آنرا به نقطه آویخت.

از جرم ریسمان صرف نظر مینمائیم علاوه بر رشته را قابل انعطاف فرض



سر ۷۵

میکنیم بقسمی که کاملاً بر سطح داخل حفره بچسبد مرکز ثقل قرقره را بر مرکز ثقل شکل منطبق اختیار مینمائیم، بنا بر آنچه که راجع بتعادل رشته بدون جرم ذکر نموده ایم قطعات AA' و BB' مستقیم الخط میباشند و در اینجا قطعات مزبور مماسهائی هستند که از نقاط A' و B' بر دایره O رسم میگردد دستگاه حاصل از رشته AB و قرقره از طرفی تحت اثر قوای مستقیمی است که بر نقاط A و B وارد گشته و از طرف دیگر تحت اثر عکس العممائی است که بر مدخل O وارد میشوند عکس العملهای اخیر بر سطح میله استوانه شکل عمود میباشند زیرا فرض میکنیم قرقره بدون اصطکاک دور آن کرده باشد بنا بر این عکس العملها محور را تلاقی خواهند نمود دستگاه حاصل از عکس العملها و قوای P و Q معادل با صفر است مجموع جبری عزمهای قوی نسبت به محور صفر است پس چنین نتیجه میشود:

$$Pr = Qr$$

بنا بر آنکه r شعاع دایره O فرض شود پس حاصل میگردد

$$P = Q \quad (۱)$$

شرطی که از تساوی (۱) معین میشود لازم است برای آنکه کافی بودن آن معین گردد ملاحظه میکنیم که فرض معلوم بودن قوه Q برای آنکه تعادل برقرار باشد باید به A قوه مانند P وارد ساخت و از تساوی (۱) معلوم میشود که قوه اخیر باید مساوی Q باشد و قوی مقدار قدرت از مقاومت متجاوز شود دستگاه در جهت P کشیده خواهد شد.

۷۸ - فشار بر محور - عکس العملهای محور باید با نتیجه قوای

P و Q بحال تعادل باشند این نتیجه برای فشار R بر محور است

چون فرض کنیم 2α زاویه بین AA' و BB' و C فصل مشترك خطوط AA' و BB' باشد و از وزن قرقره صرف نظر نمائیم، چون قوای P و Q متساوی اند نتیجه آنها بر منصف الزاویه ACB واقع خواهد شد بقسمیکه چنین نتیجه میشود

$$R = 2P \cos \alpha$$

چون α از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر کند فشار مزبور از $2P$ تا صفر تنزل خواهد کرد، مقدار فشار بازاء $\alpha = 0$ عبارت آخری وقتی دو قطعه رشته بایکدیگر موازی باشند مقدار فشار ما کزیموم و مساوی دوبرابر قدرت است و هرگاه $\alpha = \frac{\pi}{2}$ یعنی رشته بر قرقره مماس باشد مقدار فشار برابر صفر است

۷۹ - قرقره متحرك - بر حفره قرقره رشته که بکسر آن نقطه ثابت A

وصل شده داخل مینمائیم بر انتهای دیگر رشته یعنی نقطه B قدرت P را وارد میکنیم چنین فرض مینمائیم که مقاومت بقلاب قرقره آویخته شده باشد، دستگاه $ABA'B'$ تحت اثر سه قوه خارجی است: قوای Q و P و عکس العمل R نقطه A ، از تعادل رشته AA' معلوم میشود که عکس العمل باید بر امتداد AA' باشد، سه قوه P و Q و R باید تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند پس لازم است که در یک صفحه واقع باشند، مقاومت Q بوسیله میله استوانه شکل بر قرقره وارد میگردد، اگر فرض کنیم اصطکاک میله نسبت بقرقره صفر باشد خط اثر Q محور را تلاقی مینماید، قوه Q در اینجا بمنزله عکس العمل محور در قرقره ثابت است و قوه R بمنزله مقاومت محسوب میگردد، موافق همان استدلال که

در قرقره ثابت ذکر نمودیم معلوم میشود که شرط تعادل قرقره متحرك این است:

$$P = R \quad (۱)$$

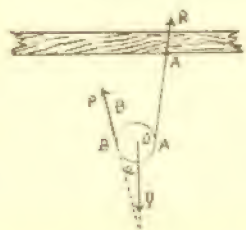
و مقدار فشار در اینصورت نیز برابر

$$R = 2P \cos \alpha \quad (۲)$$

میباشد بنا بر آنکه 2α زاویه بین دو سر رشته باشد.

س ۷۶

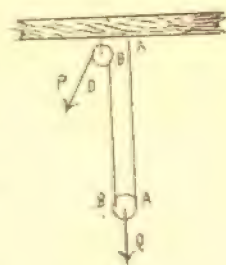
از تساوی (۱) معلوم میشود که کشش ریسمان در جمیع نقاط رشته یک مقدار است از تساوی (۲) نتیجه میشود که اگر دو سر رشته بایکدیگر متوازی باشند با قوه معین Q تعادل با بزرگترین مقادیر ممکنه



مقاومت برقرار میشود و مقدار آن برابر مضاعف قدرت است حال باید کافی بودن شرایط فوق را برای تعادل برقرار نماییم اگر بازاء مقداری از قدرت تعادل با مقاومت Q برقرار شود و 2α زاویه بین دو سر رشته اختیار گردد بنا بر تساوی (۲) این مقدار باید مساوی $\frac{Q}{2\cos\alpha}$ باشد قسمی که اگر بر B در امتداد رشته قوه برابر همین مقدار وارد سازیم قرقه بحال تعادل خواهد بود وقتی قدرت از مقدار مزبور زیادتر شود قرقه بالا میرود

۸۰- ترکیب يك قرقه ثابت و يك قرقه متحرك - برای آنکه

بتوان قدرت را به سهولت وارد نمود گاهی رشته قرقه متحرك را از قرقه ثابتی عبور میدهند و بار را بقلاب قرقه متحرك میآورند و در انتهای آن را در رشته یعنی نقطه D قوه P که همان قدرت است وارد میسازند از شرایط تعادل قرقه ثابت نتیجه میشود که باید کشش قطعه BB' از رشته در همه نقاط آن برابر قدرت باشد و از شرایط تعادل قرقه متحرك نیز معلوم میشود که این کشش باید برابر کشش قطعه AA' باشد و مقدار این کشش نیز برابر عکس العمل نقطه A میباشد، قوه P بوسیله رابطه $Q = 2P\cos\alpha$ با مقاومت بستگی دارد بنا بر آنکه 2α زاویه بین دو سر رشته باشد که از قرقه متحرك عبور



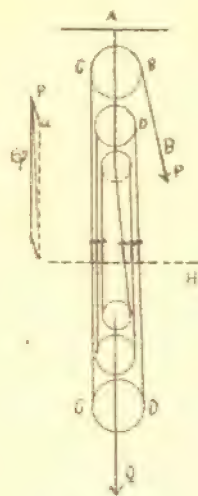
ص ۷۷

نموده و چنانکه ملاحظه میشود چون این دو رشته متوازی اند پس $Q = 2P$

۸۱- قرقه مرکب - قرقه مرکب اجتماع چند قرقه است که دارای دو شاخه و قلاب میباشد و همه حول يك محور یا محورهای متوازی متحرك اند، چون يك قرقه مرکب ثابت و يك قرقه مرکب متحرك را با یکدیگر جمع نمایند قرقه مختلط تشکیل میشود.

برای توضیح فرض میکنیم قرقه مختلط مرکب از دو قرقه مرکب

متحرك و ثابت باشد و ضمناً محورهای قرقه ها با یکدیگر متوازی و شعاع آنها مختلف باشد تا آنکه رشته بتواند از تمام قرقه های دستگاه عبور نماید قدرت بر منتها الیه B رشته وارد میگردد که بدو از قرقه ثابت و پس از آن از يك قرقه متحرك و پس علیهذا عبور نموده و بعد از آنکه از جمیع قرقه ها عبور نمود انتهای دیگرش بدو شاخه آخرین قرقه ثابت دستگاه وصل میگردد، هر يك از قرقه های مرکب را شامل سه قرقه



ص ۷۸

باید بجای رشته ها قرائتی در امتداد همانها و فوق صفحه افقی H که در جهت تحت تقویم است قرار داد قسمی که مقدار متحرك آنها مساوی 1 باشد، چون دستگاه مرکب از قرقه مرکب و رشته هایی که فوق صفحه H قرار دارند بحال تعادل است پس باید قوی تشکیل دستگاهی معادل

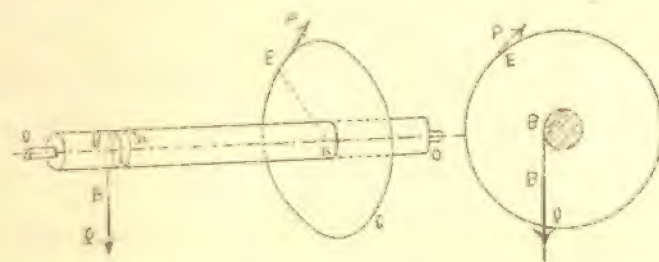
$$Q = 2P \quad \text{صفر بدهند یعنی لازم است}$$

واضح است در صورتیکه مقاومت Q معین باشد میتوان مقدار قوه P

را برای تعادل دستگاه دست آورده و باین ترتیب معلوم میشود $p = \frac{Q}{r}$ شرایط مزبور برای تعادل کافی نیز میباشد.

واضح است میتوان رابطه $\frac{Q}{r}$ را به رابطه $\frac{Q}{r_n}$ تبدیل نمود بنا بر آنکه عده فرقه‌های هر دسته n باشد.

۸۳ - چرخ چاه معمولی - قسمت اصلی چرخ چاه معمولی عبارت است از استوانه‌دواری موسوم به تنه چرخ که بوسیله میله استوانه شکلی از آهن بر دو پایه بحالت افقی نصب است و محور میله‌ها با محور تنه مشترك است، مقاومت بواسطه طنابی که بر تنه چرخ می پیچد وارد میگردد يك سر دیگر این طناب بر نقطه از سطح تنه ثابت شده، قدرت مماس بر دایره C میباشد که در محور با تنه مشترك است، ممکن است قدرت بوسیله میله آهنی که بر سطح استوانه نصب میباشد وارد شود در حالت اخیر دایره C مسیر منتهای میله است در شکل تصویر چرخ چاه را بر صفحه عمود بر محور رسم کرده‌ایم دستگاه مرکب از چرخ چاه و طناب $AB'B$ تحت اثر قوای P و Q و عکس‌العملهای پایه‌ها میباشد اگر اصطكاك صفر باشد عکس‌العملها محور



س ۷۹

و OO' را تلاقی مینمایند پس عزمشان نسبت باین خط صفر خواهد بود ولی چون باید مجموع عزمهای قوای خارجی نسبت بسور صفر باشد پس لازم میاید مجموع جذری عزمهای قوای P و Q نسبت بسور صفر شود

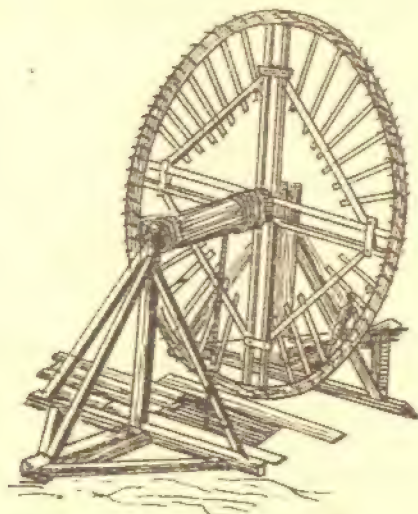
اگر r و R اشعه تنه و چرخ C باشند شرط تعادل چنین میشود:

$$(۱) \quad PR = Qr$$

بعلاوه باید P و Q بقسمی ممتد باشند که عزمشان نسبت بسور در جهات مختلفه باشد چنانکه ملاحظه میشود بفرض آنکه مقدار مقاومت Q معین باشد شرط تعادل دستگاه این است که مقدار قدرت برابر $\frac{r}{R} \cdot Q$ شود، شرایط مزبور کافی نیز میباشد حال اگر مثلاً نسبت شعاع تنه و چرخ $\frac{1}{10}$ باشد معلوم میشود که قدرت $\frac{1}{10}$ مقاومت است.

۸۴ - چرخ چاه معدنی - برای استخراج سنگ از معدن اسبابی موسوم بچرخ چاه معدنی استعمال میشود و اختلاف آن با چرخ چاه معمولی در این است که در اینجا قدرت مماس بر چرخ نیست، بلکه قدرت وزن عمده است که بر چرخ بواسطه پلکانی که در آن تعبیه شده تغییر مکان میدهد، اگر P وزن

عمله یعنی مقدار قدرت باشد که در نقطه B تصویر شده و Q مقاومت یعنی وزن سنگی باشد که مقصود استخراج آن است و بمنتهای طنابی بسته شده چون O را تصویر محور چرخ و α را زاویه حاده بین OB و قطر افقی OA اختیار نماییم، مانند تعادل چرخ چاه معمولی



س ۸۰

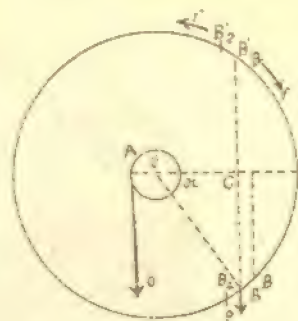
شرط تعادل این است که عزم قوای P و Q نسبت به محور صفر شود یعنی:

$$(۱) \quad Qr = PR \cos \alpha$$

فرض آنکه شعاع r و شعاع چرخ باشد و ضمناً چون در مثلث OBC ملاحظه کنیم $OC = R \cos \alpha$ ، از تساوی (۱) چنین نتیجه میشود:

$$(۲) \quad \cos \alpha = \frac{Qr}{PR}$$

اگر طرف ثانی این تساوی کمتر از واحد باشد یعنی زمانی که Q کمتر از $\frac{PR}{r}$ اختیار شود میتوان زاویه مانند α مابین 0 و $\frac{\pi}{2}$ تعیین کرد. بقسمی که تساوی (۲) محقق گردد، نظیر این زاویه برای عمده دو وضع تعادل B و B' را ایجاد میکند که نسبت صفحه افقی H متقارن اند و حال ثابت مینمائیم که تعادل در نقطه B که تحت صفحه H است پایدار بوده اما در نقطه B' فوق صفحه H ناپایدار میباشد.



س ۸۱

فرض میکنیم که عمده از نقطه B به نقطه B_۱ نزدیک به B و فوق آن تغییر مکان دهد در نتیجه این تغییر مکان متجه P و Q که محور را تلاقی مینماید چرخ را در جهت سهم حرکت مینهد یعنی دستگاه را بحالت تعادل در میآورد همچنین است اگر عمده به نقطه B_۲ تغییر

مکان دهد جهت حرکت چرخ موافق سهم f خواهد بود یعنی باز اسباب بطرف وضع تعادل B سیر مینماید، بهمین ترتیب معلوم میشود که وضع تعادل نقطه B' ناپایدار است و در این نقطه تغییر مکان عمده خالی از خطر نیست.

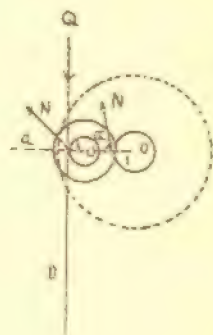
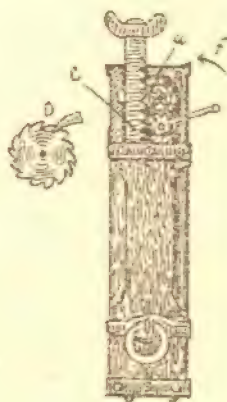
۸۴ - کریک Cric - اسبابی است که برای بالا بردن بارهای سنگین بارتفاعات قلیل استعمال میشود از تفاع مزبور از ۶۰ سانتیمتر تجاوز نمینماید

قسمت اصلی اسباب عبارت از تیغه مضرس C و چرخ دندانه دار a است، چرخ اخیر مربوط به چرخ مضرس A است که در محور با آن مشترك بوده و بواسطه چرخ b بحرکت در میآید، تیغه مضرس داخل محفظه آهنی متحرك میباشد.

داخل محفظه مزبور ضمیمه فلزی D و مربوط به چرخ b قرار دارد که همواره مابین دو دندانه چرخ به محور b واقع میباشد هنگامیکه قدرت چرخ a را در جهت سهم f بحرکت در میآورد ضامن D بواسطه وزن خود بین دو دندانه چرخ مزبور قرار گرفته و مانع از این میشود که حرکت در جهت مخالف سهم انجام گیرد.

بار برداشتنی را بر قسمت فوقانی تیغه C قرار میدهند.

فرض میکنیم شعاع دایره اولیه چرخ b و شعاع دایره اولیه چرخ a و شعاع دایره اولیه a باشد دایره اخیر دارای گردش بدون لغزش بر خطی مانند D که متعلق به تیغه است میباشد



س ۸۲

میله از طرفی تحت اثر قوه Q که در امتداد D وارد شده میباشد و از طرف دیگر تحت اثر عکس العمل N که بوسیله چرخ a وارد میگردد قرار دارد این عکس العمل قائم بر دندانها در نقطه تماس میباشد، همچنین تیغه مزبور تحت اثر عکس العملهای لغزشی نیز واقع میگردد. عکس العملهای اخیر قائم بر D میباشد اگر لغزش را بدون اصطکاک فرض کنیم تصاویر قوی بر D حاملها می هستند که مقادیر جبری آنها دارای مجموعی برابر صفر است یعنی میتوان نوشت:

$$(۱) \quad Q = N \sin a$$

فرض آنکه a زاویه بین امتداد N با شعاع Ol از چرخ a باشد. دستگاه مرکب از چرخهای a و A تحت اثر قوه متقابل با N و عکس العملهای محور مشترکشان و عکس العمل N' از چرخ b نسبت به چرخ A بحال تعادل میباشد اگر a' زاویه بین این عکس العمل و خط المکررین $O'O$ باشد، بنا بر تعریف عزم ثابت نسبت به محور چرخ a میتوان چنین نوشت:

$$(۲) \quad N r \sin a = N' r' \sin a'$$

چرخ b تحت اثر قوه متقابل با N' و قدرت P و عکس العملهای محورش میباشد، بنا بر تعریف عزم نسبت به محور چرخ b این رابطه حاصل است:

$$(۳) \quad N' r' \sin a' = P R'$$

R' طول میله است، چون سه تساوی را در یکدیگر ضرب نمائیم حاصل میگردد

$$Q = P \frac{R R'}{r r'}$$

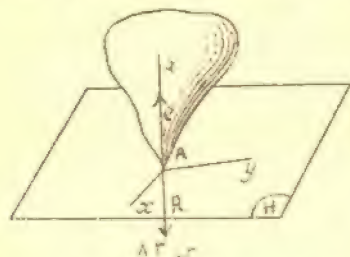
مثلا اگر $R = ۵r$ و $R' = ۵r'$ با قدرتی که کمی زیاد تر از ۳۰ کیلوگرم باشد میتوان جسمی بوزن ۷۵۰ کیلوگرم را بالا برد.

جسمی که بر صفحه ثابتی بواسطه یک نقطه متکی میباشد

۸۵ - قضیه - شرط لازم و کافی برای آنکه جسم صلبی که بواسطه یک نقطه خود بدون اصطکاک بر صفحه ثابتی متکی است تحت اثر قوای مستقیم وارد بدان بحال تعادل باشد این است که قوای مزبور دارای منتجه قائم بر صفحه ثابت و مار بر نقطه اتکاء

باشند بعلاوه باید منتجه مزبور بقسمی ممتد باشد که جسم بر صفحه بچسباند.

اولا شرط لازم است - فرض میکنیم جسم بحال تعادل و A نقطه باشد که جسم را بدون اصطکاک بوسیله آن بر صفحه H قرار داده ایم، قوای خارجی که جسم تحت اثر آنها است عبارتند از قوای مستقیم و عکس العمل Q صفحه، قوه اخیر بر نقطه A مرور کرده و بر صفحه قائم است.



واضح است اگر بجای قوای مستقیم وارده قوه R را که مقابل با Q است قرار دهیم تعادل جسم برقرار میماند.

بنا بر این لازم میاید منتجه قوای مستقیم متقابل با R باشد و عبارت از منتجه قوای مزبور بر نقطه A بگذرد و بر صفحه H قائم باشد. بعلاوه وقتی جسم را بر صفحه قرار میدهیم باید منتجه قوای مستقیم یا صفر بوده یا بطریقی ممتد باشد که جسم را بر صفحه H بچسباند زیرا اگر در جهت مخالف جهت مزبور شود جسم از صفحه جدا خواهد کرد.

ثانیا شرط کافی است - فرض میکنیم قوای مستقیم دارای منتجه باشند که در حکم قضیه ذکر شده، قوه که با این منتجه متقابل باشد عبارت از عکس العمل ممکن الحصول است پس جسم بنا بر اصل استاتیک جسم صلب غیر آزاد بحال تعادل خواهد بود.

قدام فشار بر نقطه اتکاء بر این منتجه R است که بر نقطه A از صفحه وارد شده.

۸۶ - پایداری - شرط آنکه تعادل پایدار باشد این است که اگر جسم را کمی از وضع تعادلش منحرف نمائیم مجددا به همان حال برگردد در حالیکه جسم تنها تحت اثر قوه وزن خود باشد خط اثر منتجه قوای مستقیم قائمی است که بر مرکز ثقل آن مرور می نماید، صفحه اتکاء در اینصورت باید افقی بوده و مرکز ثقل جسم بر قائم مار بر نقطه اتکاء

واقع شود.

اگر مرکز ثقل G فوق صفحه H باشد چون جسم را از وضع تعادلش منحرف سازیم واضح است تحت اثر وزنش از این حالت خارج خواهد شد بنابراین تعادل ناپایدار است مانند آنکه اگر راس جسمی مخروطی شکل را بر صفحه افقی H قرار دهیم

اگر G تحت صفحه اتکاء واقع باشد وقتی جسم را از وضع تعادل خود منحرف نماییم مجدداً تحت اثر وزنش به همان حال رجعت می نماید تعادل بی تفاوت است وقتی که اگر جسم را تغییر وضع دهیم مقاومت نماید و این در حالتی است که نقطه A بر G منطبق باشد در حالات فوق همواره چنین فرض میکنیم که تنها جسم در يك نقطه با صفحه H اتکاء داشته باشد

وقتی جسم مخنوم به سطحی مماس با صفحه باشد غالباً تعادل پایدار است بدون آنکه لازم باشد نقطه G تحت صفحه H قرار گیرد، مثلاً اگر جسمی متشابه الاجزاء بشکل قطعه کروی باشد مرکز تقارن آن بر محور تقارن قطعه واقع می باشد بقسمی که چون جسم را از وضع تعادل بوضع دیگر انتقال دهیم مجدداً به همان حالت بر میگردد

جسمی که بواسطه خطی بر صفحه ثابتی متکی است

۸۷. قضیه. شرط لازم و کافی برای تعادل جسمی تحت اثر قوای مستقیم که بدون اصطکاک بواسطه مستقیم ثابتی بر صفحه متکی می باشد این است که متجه قوی قائم بر صفحه بوده و خط اثرش صفحه را بین دو انتهای اتکاء تلاقی نمایند.

اولاً شرط لازم است. جسم را بحال تعادل فرض مینماییم عکس عملها قوای قائم بر صفحه بوده و بتقاطعات از جسم که در صفحه اتکاء قرار دارند وارد میشوند و بعلاوه در همانطرفی از صفحه که نقاط مزبور قرار دارند واقع می باشند، این قوی دارای متجه قائم بر صفحه و ممتد در

همان جهتی که جسم است خواهند بود بعلاوه این متجه دارای خط اثری است که خط اتکاء جسم را مابین دو سر آن تلاقی مینماید.

قوای مستقیم باین ترتیب باید با متجه مزبور تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند پس لازم است که دارای متجه عمود بر صفحه باشند بقسمی که جسم تحت اثر آن بر صفحه اتکاء بجسبند و ضمناً خط اثرش مستقیم اتکاء را بین دو سر آن تلاقی نماید.

ثانیاً شرط لازم است. اگر قوای مستقیم دارای متجه باشند که حائز شرایط حکم است، اگر جسم دارای دو نقطه اتکاء باشد تنها يك طریق، و اگر دارای نقاط اتکاء زیاد باشد بطرق عدیده میتوان این متجه را بقوای متوازی و متحدالجهت که بتقاطعات مختلفه اتکاء وارد میگردد تجزیه نمود، قوای متقابل آنها عکس عملهای ممکن الحصول اند بنا بر این جسم بحال تعادل خواهد بود.

مثلاً اگر مخروط یا استوانه متشابه الاجزاء را بوسیله یکی از مولدهایش بر صفحه افقی قرار دهیم بحال تعادل باقی خواهد ماند در اینحال نقاط اتکای بیشماری که همان مولد استوانه یا مخروط است موجود می باشد.

جسمی که بر صفحه ثابتی بواسطه نقاط غیر واقع بر يك استقامت متکی است.

۸۸. کثیرالاضلاع اتکاء. وقتی جسمی بر صفحه بوسیله نقاط غیر واقع بر يك استقامت متکی است کثیرالاضلاعی که جمیع نقاط اتکاء بر محیط آن یا درون آن واقع اند کثیرالاضلاع اتکاء میگویند

۸۹. شرایط تعادل. قضیه. شرط لازم و کافی برای تعادل جسم صلبی تحت اثر قوای مستقیم که بر صفحه ثابتی متکی می باشد این است که قوای مزبور دارای متجه قائم بر صفحه باشند بقسمی که این متجه جسم را بر صفحه بجسباند و بعلاوه خط اثرش صفحه را داخل کثیرالاضلاع اتکاء تلاقی نماید.

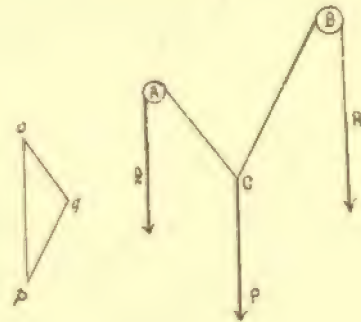
حل بعضی مسائل

۹۱- سه رشته در نقطه C یکدیگر گره خورده اند یکی از آنها تحت اثر وزن P است دو رشته دیگر پس از عبور از قرقره A و B تحت اثر اوزان Q و R در میانند مقصود وضع تعادل نقطه C است نقطه C تحت اثر سه قوه P و کشش های AC و BC میباشد، وقتی تعادل برقرار است که قوای مزبور در یک صفحه V باشند، دو قسمت از رشته که از قرقره A عبور مینماید در صفحه همین قرقره قرار دارد این صفحه بمناسبت آنکه شامل خط اثر قوه Q است قائم میباشد ولی از طرفی صفحه مزبور که بر AC مرور مینماید بر صفحه V منطبق خواهد شد، بهمین دلیل معلوم میشود قرقره B نیز در صفحه V واقع است.

تعادل قرقره A وقتی برقرار است که کشش رشته AC برابر Q باشد و همچنین تعادل قرقره B در حالتی مقرر میگردد که کشش رشته BC برابر R شود.

قوای P و Q و R وارد به نقطه C باید بحال تعادل باشند پس کثیرالاضلاع این قوی مسدود خواهد بود.

میتوان مثلث opq را با معلومات سه ضلع و امتداد ضلع op بنا نمود بقسمیکه $op = P$ و $oq = Q$ و $qp = R$ و خط BC بموازات op و خط AC بموازات oq



س ۸۰

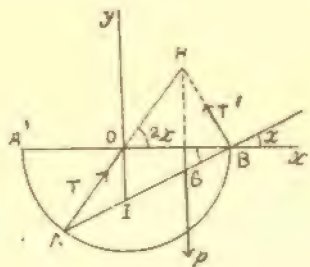
میگردد بنا بر این وضع نقطه C مشخص میشود برای آنکه مسئله ممکن باشد باید مثلث opq رسم گردد یعنی لازم است هر یک از قوای P و Q و R از مجموع دو قوه دیگر کمتر باشد.

۹۲- میله وزین و متشابه الاجزائی بطول ۲۱ را بدون اصطکاک بر کناره جامی بشکل نیمکره که محور تقارنش قائم است تکیه داده اند یکی از دو منتهای میله بر سطح داخلی جام متکی است وضع تعادل آنرا تعیین نمایید.

O را مرکز جام و R را شعاع آن و A را نقطه که منتهای میله بر سطح داخلی جام متکی است فرض مینمائیم و B را نقطه از میله اختیار میکنیم که بوسیله آن بر کناره جام متکی میباشد.

میله تحت اثر سه قوه است: P وزن میله که بمركز ثقل آن یعنی نقطه G وسط AB وارد است، عکس لعمل T جام در نقطه A که بر امتداد شعاع AO میباشد عکس العمل T'

کناره جام که اگر AB را استوانه شکل فرض کنیم عمود بر AB خواهد بود.



س ۸۶

وضع تعادل میله متعلق به صفحه قائمی است که بر شعاع OB میگذرد و ما آنرا صفحه شکل اختیار کرده ایم.

زاویه بین OB و وضع تعادل AB را x فرض مینمائیم محور Ox را بر OB که از O به B توجه است اختیار میکنیم محور Oy را عمود بر Ox از نقطه O مرور میدهم بقسمی که بطرف فوق متوجه باشد، چون مجموع جبری تصاویر قوی بر محورهای Ox و Oy و مجموع جبری عزمهای آنها نسبت بمحور Oz عمود بر صفحه xOz صفر است پس سه معادله نسبت به مقادیر نامعلوم T و T' و x بدست میآید تصاویر T و T' بر Ox و Oy بترتیب

عبارتند از $T \cos x$ و $-T \sin x$ و $T \sin x$ و $T \cos x$ پس در معادله اول چنین خواهد بود:

$$(۱) \quad T \cos x - T \sin x = 0$$

$$(۲) \quad -p + T \sin x + T \cos x = 0$$

برای محاسبه عزم وزن باید طول نقطه G را تعیین کرد ملاحظه میکنیم که طول مطلوب برابر تصویر OG یعنی منتهی دور OAG بر محور Ox میباشد، قسمی که طول G برابر مجموع جبری تصاویر OA و AG بر Ox است، مقدار جبری تصویر AO مساوی $R \cos x$ و تصویر OA برابر $-R \cos x$ است و همچنین مقدار جبری تصویر AG مساوی $l \cos x$ میباشد، عزم p نسبت به محور Oz با Ox و Oy تشکیل کنج $Oxyz$ را در موضع مستقیم است میدهد و مقدار جبری آن عبارت است از:

$$-pl - R \cos x + l \cos x$$

عزم T' دارای مقدار جبری $RT' \cos x$ میباشد پس معادله سوم چنین است

$$(۳) \quad -p(l \cos x - R \cos x) + RT' \cos x = 0$$

چون طرفین معادله (۱) را در $\sin x$ و طرفین معادله (۲) را در $\cos x$ ضرب نموده آنها را با یکدیگر جمع نمائیم حاصل میشود:

$$(۴) \quad T' \cos x = p \cos x$$

چون معادله (۴) را با (۳) مقایسه کنیم نتیجه میشود

$$(۵) \quad R \cos x - l \cos x = 0$$

برای آنکه یکی از جوابهای این معادله در فرض مسئله صدق نماید باید مقدار مزبور بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ بوده و مقادیر T و T' که متناظر با این جواب اند ثابت باشند، فرض میکنیم ریشه x بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ واقع باشد $\cos x$ مثبت است بنابر معادله (۵) $\cos x$ مثبت میباشد مقادیر T و T' در وسیله معادلات (۴) و (۱) معین میشوند نیز مثبت خواهند بود میتوان AB را متناظر با x بنامود، برای آنکه بتوان میله را موافق امتداد این خط قرار داد باید طول میله بیشتر از وتر AB باشد عبارت آخری باید $R \cos x > l$ و یا $\frac{l}{R} < \cos x$

اگر این شرط برقرار باشد بوسیله محاسبه معلوم میشود که AB یکی از وضع تعادل است

چون $\cos x$ را به $1 - R \cos^2 x$ و $\cos x$ را به k بدل نمائیم معادله (۵) بدین صورت در میآید

$$(۶) \quad 2R(2u^2 - 1) - lu = 0$$

برای آنکه یکی از ریشه های u از این معادله متناظر با زاویه x باشد قسمی که $\cos x = u$ جوابی را معین نماید لازم و کافی است که u مثبت بوده و کمتر از 1 باشد $\frac{l}{R}$

معادله (۶) دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی است ریشه مثبت آن وضع تعادل را وقتی معلوم میکند که کمتر از 1 و $\frac{l}{R}$ باشد یعنی در صورتیکه

$$f(1) > 0 \quad \text{و} \quad f\left(\frac{l}{R}\right) > 0$$

$f(u)$ نمایش طرف اول معادله (۶) است که در آن ضرب u^2 مثبت میباشد از این نامساویها نتیجه میشود:

$$R \frac{1}{2} < l < 2R$$

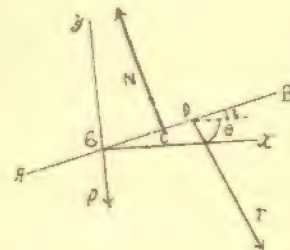
در حالت حدی که $l = 2R$ آن وضع تعادل قطر $A'B$ بوده و T برابر صفر است، در حالت حدی که در آن $l = R \frac{1}{2}$ ، در حالت تعادل یکی از دو انتهای دو میله در B است و این وضع متناظر با $\cos x = 1$ میباشد ملاحظه میکنیم که شرط $l < 2R$ لازم است زیرا اگر این شرط برقرار نباشد مرکز ثقل میله برای جمیع اوضاع معروض خارج جام واقع میگردد، تبصره - در مورد T و T' باید متقارب باشند قائم نقطه O بر نقطه H یعنی محل تلاقی T و T' میگذرد زاویه ABH قائمه میشود H بر دایره مرکز O و شعاع OA قرار دارد قائم نقطه O بر نقطه A وسط AO خواهد گذشت برای بنای AB کافی است طولهای AB و AO تعیین شوند اما

$$BA - BI = \frac{l}{r}$$

$$BA \times BI = 2R^2 \quad \text{و یا} \quad BA \times BI = BO \times BA'$$

پس، طلب راجع میشود برسم دو طول که تفاضل و مسطحشان در دست است.
۹۳ - ورقه مثلثی شکل ABC بوزن ۱ که مشابه الاجزاء فرض شده در صفحه قائم قرار دارد بخشی که ضلع AC از آن بر افقیه منطبق است بعلاوه میدانیم $BC = a$ و $AC = b$ و $C = 120^\circ$ اولاً اضلاع a و b را چگونه باید اختیار کرد تا ورقه بحال تعادل باشد ثانیاً اگر تعادل برقرار نیست بر راس B قوه F را ممتد از تحت بمفوق در امتداد قائم وارد میسازیم تا تعادل برقرار شود حدودی را که F بین آنها تغییر مینماید تعیین کنید.

اولاً تعیین اضلاع a و b - ورقه بر نقاط واقع بر يك استقامت متکی است برای اینکه تعادل برقرار گردد لازم و کافی است که قائم مار بر مرکز ثقل G قاعده مثلث را مابین نقاط M و C تلاقی کند، و در نتیجه چون مبداء را M اختیار کنیم باید $MJ \leq MC$ (۱) اما پس $MJ = \frac{1}{3} MH = \frac{1}{3} \left(\frac{b}{1} + \frac{a}{1} \right)$ یعنی $a \leq 2b$ و این شرط تعادل ورقه است.



ثانیاً - حدود F - اگر $a > 2b$ براس B قوه F را وارد میسازیم F و P دارای منتهیه هستند بخشی که $R = P - F$ و این منتهیه ورقه را بر افقیه xx' میچسباند بعلاوه $1' > F$

برای آنکه تعادل تحت اثر قوای جدید F و P برقرار گردد باید قائم R خط AC را بین A و C تلاقی نماید بخشی که اگر مبداء را M اختیار کنیم حاصل میگردد:

$$(۲) \quad -\frac{b}{r} \leq MK \leq \frac{b}{r}$$

برای محاسبه MK قضیه وارینین را نسبت به نقطه M مراعات کنیم حاصل میشود $MK = \frac{P - 2F}{P - F} \cdot \frac{a + b}{1}$ و یا $R \cdot MK = P \cdot (MJ) - F(MH)$ پس از شرط (۲) نتیجه میشود:

$$-2b(P - E) \leq (a + b)(P - 2F) \leq 2b(P - F)$$

$$\frac{P}{r} \cdot \frac{a - 2b}{a} \leq F \leq \frac{P}{r} \cdot \frac{1b + a}{2b + a} \quad \text{و یا}$$

حالت مخصوص - هرگاه $F = \frac{P}{r} \cdot \frac{a - 2b}{a}$ نقطه K بر نقطه C

منطبق است وقتی $F = \frac{P}{r}$ نقاط K و M و O بر یکدیگر منطبق اند.

اگر $F = \frac{P}{r} \cdot \frac{1b + a}{2b + a}$ نقطه K بر نقطه A منطبق است.

۹۴ - وقتی دسته اجسام تحت اثر قوای مفروض بحال تعادل اند لازم است که قوای خارجی وارد با اجسام مزبور تشکیل دستگاهی معادل با صفر بدهند شرایط مزبور عموماً کافی نیستند.

برای آنکه تعادل دسته اجسام مزبور برقرار گردد باید متوالیا تعادل هر يك از آنها را تحقیق نمائیم یعنی میتوان عکس العملهای هر يك از اجسام را نسبت به دیگری تعیین نموده و هر يك از آنها را تحت اثر قوای وازده و عکس العملهای آزاد فرض نمائیم.

مثال - دو میله AB و AC بطولهای l و h در نقطه A
بارتفاع H فوق صفحه افقی که بر آن مواقع B و C از میله میتواند
لغزش بدون اصطکاک داشته باشند مفصل شده اند، میله های
مزبور در یک صفحه قائم قرار دارند، رشته افقی غیر قابل کشش
بطول مناسب در ارتفاع h میله ها را بهم وصل مینماید میله AB
حامل وزن m است که در نقطه D وارد شده به قسمیکه $BD = mBA$
 m عدد مفروض است، مقصود تعیین کشش رشته و عکس العملهای
مفصل است بفرض آنکه وزن میله ها و رشته را غیر قابل ملاحظه
فرض کنیم.

میله AC تحت اثر سه قوه است. عکس العمل صفحه افقی بر نقطه C
کشش T رشته و عکس العمل R مفصل میله. قوای مزبور باید در یک صفحه
باشند این صفحه همان صفحه قائمی است که شامل میله است این صفحه
شامل رشته و میله AB نیز خواهد شد زیرا شامل نقاط A و E میگردد.
عکس العمل مفصل میله AB، متقابل با R است جمیع قوایی که بر میله ها
وارد میشوند در صفحه قائم ماز بر آنها قرار دارند.

مسئله پنج مجهول دارد:

مقادیر عکس العملهای زمین در نقاط
C و B، مقدار کشش رشته تصاویر

عکس العمل R بر دو محور.

ملاحظه میکنیم که قوای خارجی

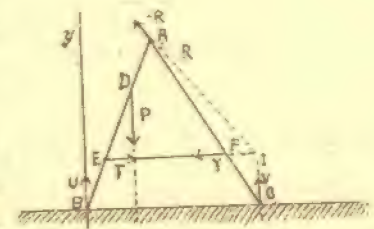
وارد بر هر یک از دو میله باید تشکیل

دستگاه معادل با صفر بدهد باین

ترتیب برای هر میله سه معادله حاصل

میکردد که میتوان از آنها مقادیر

مجهوله را حساب کرد. افقیه BA را محور طول و قائم BA را محور



ش. ۸۸

مجهوله را حساب کرد. افقیه BA را محور طول و قائم BA را محور

عرض فرض میکنیم عزم حاملها را نسبت به محور Bz عمود بر صفحه xBy
تعیین مینمائیم X و Y را تصاویر R یعنی عکس العمل مفصل بر AC و X و Y
تصاویر عکس العمل مفصل بر AB، U و V را مقادیر جبری عکس العملهای
نقاط C و B فرض مینمائیم. معادلات تعادل AB چنین خواهند بود:

$$(۱) \begin{cases} T - X = 0 \\ U - P - Y = 0 \\ -Th - Pam - aY + HX = 0 \end{cases}$$

a برابر $\sqrt{l^2 - H^2}$ یعنی طول نقطه A است میدانیم عزم قوه که تصاویرش
بر محور X و Y باشند نسبت به محور Bz بنا بر آنکه u و v مختصات نقطه اثر
قوه باشد چنین است $XY - PX$ بنا بر این شرط تعادل میله AC چنین خواهد بود:

$$(۲) \begin{cases} -T + X = 0 \\ V + Y = 0 \\ Th + V(a + a') + aY - HX = 0 \end{cases}$$

بفرض آنکه $a' = \sqrt{l'^2 - H^2}$

بازاء یکدیگر از جوابهای این معادلات که در آنها T و U و V و X و Y
مجهول میباشدند یک وضع تعادل نظیر است بشرط آنکه T و U و V مثبت باشند.

معادلات اول دو دستگاه با یکدیگر متحد اند پس دو دستگاه منجر
به پنج معادله و پنج مجهول میگردد: بلافاصله معلوم میشود.

$$T = X \text{ و } U = P + Y \text{ و } V = -Y$$

و از جمع معادلات سوم دو دستگاه نتیجه میشود.

$$V = \frac{Pam}{a + a'}$$

چون مقادیر Y و T را در سومین معادله دستگاه (۱) قرار دهیم حاصل میگردد

$$X = P \frac{aa'}{a + a'} \frac{m}{H - h}$$

و از آن حاصل میشود:

$$V = \frac{aa'}{a+a'} \quad \text{و} \quad U = P \frac{a+a'-ma}{a+a'}$$

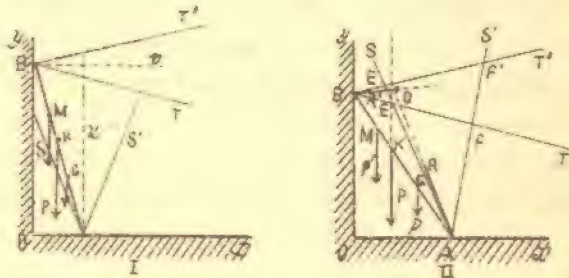
مسئله ممکن است. وقتی D بر AB بالا برود m ترقی مینماید کشر رشته و عکس العمل R و V زیاد شده و عکس العمل U کم میگردد.

۹۵ - تعادل فردبان - فردبانی میتواند بدون اصطکاک بر زمین افقی متکی بر دیوار قائم بلغزد، وزن فردبان و عمده که بر آن حرکت مینماید معین است، ضریب اصطکاک فردبان بر زمین و دیوار مفروض است، مقصود تعیین اوضاع تعادل فردبان است بفرض آنکه بمحور تقارن خود منجر شده باشد، فردبان را بقسمی قرار میدهیم که محور تقارن مزبور در صفحه عمود بر اثر دیوار نسبت بزمین قرار گیرد.

صفحه قائمی را که بر محور تقارن فردبان میکند بمنزله صفحه شکل اختیار مینمائیم. G مرکز ثقل فردبان و M وضع عمده است و فردبان بر نقاط A و B متکی است P وزن فردبان، P' وزن عمده. طول A، ka و ka' طولهای G و M. عرض B، b و f و f' ضرایب اصطکاک فردبان بر زمین و دیوار و φ و φ' زوایای متناظر آنها است.

خطوط AS و AS' و BT و BT' را که با قائم بر زمین و دیوار زوایای φ و φ' احداث مینماید رسم میکنیم. برای آنکه تعادل فردبان در وضع AB برقرار گردد لازم است که بتوان دو عکس العمل مار بر نقاط A و B یافت بقسمی که حاملهای نمایش آنها داخل زوایای SAS' و TBT' واقع بوده و با قوای P و P' تشکیل دستگاهی معادل صفر بدهند، برای این منظور لازم است بر خط اثر این منته نقطه بیابیم که در آن واحد داخل زوایای SAS' و TBT' واقع باشد اما این شرط کافی نیز هست زیرا اگر بر خط اثر P نقطه مانند D داخل زوایای مزبور یافت شود توجیه مانند R و R' موجود است که مجموعشان AD و BD بوده و با P تشکیل دستگاهی معادل صفر

میدهند. قوای مزبور عکس عملهای ممکن الحصول ارتباطی میباشند، فردبان بحال تعادل خواهد بود.



س ۸۹

ساده ترین حالات وقتی است که زاویه OAB کمتر از φ باشد. AB داخل زاویه SAS' خواهد بود. فردبان برای جمع اوضاع عمده بحال تعادل است حال اگر زاویه OAB بیشتر از φ باشد خطوط AS و AS' و BT و BT' اضلاع چهار ضلعی محدب EE' FF' میباشند. اگر E رأسی باشد که طولش از طول سایر روس چهار ضلعی کمتر است برای تعادل فردبان لازم و کافی است که طول نقطه اثر P اقلا مساوی طول E باشد.

تمرینات

۹۶. کره شمع یک سیم از ماده منته الاخراتی که هر متر مکعب آن وزن ۲.۷ تن است بواسطه نقطه O رشته بجزیم غیر قابل ملاحظه آویخته شده است. اگر تحت اثر قوه افقی F که قائم O را تلاقی مینماید بوضع تعادل است در وضع تعادل رشته با قائم O زاویه ۳۰° ایجاد میشود مقدار F را حسب دین تعیین کنید.
۹۷. رشته صلبی که بشکل دایره بر مرکز O میباشد از حلقه کوچک M عبور مینماید. این حلقه دو رشته بسته اند به یکی از رشته ها وزن Q وارد شده دیگری از مدخلی

که بر دایره در یکی از دو سر قطر افقی AA' تعین شده عبور مینماید بر این نقطه وزن P را وارد نموده اند. مقدار زاویه AOM را که متناظر با وضع تعادل است تعیین نمایند. با چه شرطی یکی از دو انتهای B و B' قطر قائم برای حلقه M دارای وضع تعادل است. حلقه M میتواند بدون اصطکاک بر دایره بلغزد.

۹۸. دو نقطه وزین میتوانند بدون اصطکاک بر دایره قائمی بلغزند. نقاط مزبور بواسطه رشته قابل انعطاف و غیر قابل کشش بجرم غیر قابل ملاحظه بیکدیگر وصل شده اند. اوضاع تعادل این نقاط را تعیین نمایند.

۹۹. دایره بر مرکز O در صفحه قائم مفروض است بر قائم O فوق این نقطه خارج دایره فرقه کوچک A نصب است. رشته BAM از این رشته عبور مینماید. وزن P بانهای B آویخته شده بر دیگر رشته حلقه ایجاد و جرم غیر قابل ملاحظه وصل است بر این حلقه وزن Q وارد میشود حلقه مزبور بر دایره دارای لغزش بدون اصطکاک است اوضاع تعادل را تعیین کنید جرم رشته غیر قابل ملاحظه است.

۱۰۰. دو نقطه بوزن P و P' بر صفحه افقی واقعند نقاط مزبور بواسطه نخ قابل ارتجاعی که دارای کشش متناسب با امتداد رشته است بیکدیگر وصل شده اند f و P ضرایب اصطکاک نسبت باین نقاط است تعادل دستگاه را معین کنید.

۱۰۱. ورقه مستوی متشابه الاجزاء بشکل متوازی الاضلاع را سه نفر که یکی از آنها بر یکی از روس قرار دارد حمل میکنند دو نفر دیگر چه نقطه از محیط ورقه را بپشتگاه دارند تا هر سه يك فشار تحمیل نمایند.

۱۰۲. مثلث وزین متشابه الاجزاء ABC که اضلاع a و b و c از آن و همچنین زوایای مثلث A و B و C و وزن φ از آن معین است در نقطه M بوسیله رشته بدون جرم که براس A وصل است آویخته شده چه وزنی باید بر یکی از دو راس B و C وارد شد تا آنکه در وضع تعادل مثلث ضلع BC افقی باشد.

۱۰۳. میله صلبی بوسیله منتهای علیای که حول آن نتواند نوسان کند تثبیت شده طول آن ۵ متر و وزنش ۱۰۰ کیلوگرم است منتهای اسفل آن بوسیله قوه بمقدار ۴۰ کیلوگرم و بر امتداد عمود بر میله رانده شده وضع تعادل میله را معلوم کنید.

۱۰۴. ورقه متشابه الاجزاء بسیار نازکی بشکل مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین ضلع a مفروض است این ورقه بدون اصطکاک بوسیله راس خود در سطح داخلی نیم کره مجوف بشعاع R که دایره عظیمه قاعده اش افقیه ایست متکی میباشد وضع تعادل ورقه - فیل θ آن را نسبت بقائم معین کنید - فرض میکنیم x طول قائم محصور بین مرکز کره و ورقه باشد - در حالت مخصوصی که $a = R\sqrt{2}$ مسئله را حل کنید.

۱۰۵. میله متشابه الاجزاء وزینی بوسیله یکی از دو انتهایش بدون اصطکاک بر

دایره قائمی گذاشته شده است انتهای دیگر میله بر قطر قائم همین دایره است وضع تعادل میله را معین کنید.

۱۰۶. قرص مستدیر متشابه الاجزاء بوزن P و بر مرکز C بوسیله نقطه O از محیطش آویخته شده است.

اولا. این قرص وزین بحال تعادل است یکی از دو سر قطر افقی آن یعنی نقطه A وزنی میاویزند معین کنید مقدار این وزن چهقدر باید باشد برای آنکه خط OA در وضع جدید تعادل نسبت بقائم بمیل 30° باشد - در چه نقطه مانده خط AC قائم O را تلاقی میکند مقدار $\frac{JA}{JC}$ را 0.1 تقریب حساب کنید.

ثانیا. فرض آنکه وزن آویخته شده نصف مقداری باشد که قبلاً حساب کرده ایم - مقدار زاویه OA را با قائم در وضع تعادل متناظر بحسب درجه و دقیقه حساب کنید.

۱۰۷. طرف نیم کره شکلی بضخامت غیر قابل ملاحظه و شعاع R از طرف تحدیش بر صفحه افقی نهاده شده بدو سر قطر AB از آن دو وزن P و Q را وارد میکنیم وضع تعادل طرف را معین کنید.

۱۰۸. جامی بشکل نیم کره و وزن P و شعاع خارجی R و ضخامت C مفروض است این جام بوسیله جدار خارجی بر سطح افقی نهاده شده است بنقطه A واقع بر کنار خارجی جام وزن P را قرار داده اند مقصود محاسبه زاویه ایست که صفحه قاعده AB جام با قائم در وضع تعادل حاصل ایجاد میکند.

مثال عددی. جام از جنس نقره است و وزن مخصوص 10.5 و $R=0.1$ و $C=0.05$ و $P=0.5$ کیلوگرم.

۱۰۹. مرکز ثقل G از میله وزین غیر متشابه الاجزاء AB بمقطع جلی کوچک مینهد و در نسبت $x = \frac{GA}{GB}$ تقسیم میکند وضع تعادل میله را معین کنید هنگامیکه دو انتهای آنرا بدون اصطکاک بر سطح داخلی کره ثکبه دهیم $2a$ را زاویه فرض میکنیم که میله از مرکز بدان رویت شود.

اولا. بحسب x و a زاویه حاده β میله را با صفحه افقی در وضع تعادل تعیین کنید $(GA < GB)$.

ثانیا. مقدار β را تا يك درجه تقریب در حالت مخصوصی که $x = \frac{1}{2}$ و $a = 30^\circ$ باشد حساب کنید.

ثالثا. تغییرات β را بحسب x در حالت کلی که در آن x و a غیر مشخص ولی a ثابت بماند معین کنید.

۱۱۰. کره متشابه الاجزاء بشعاع R و وزن P بدون اصطکاک بر صفحه مایل بمیل

۱۱۰ نسبت بصفحه افق متکلی است کره مزبور بوسیله رشته غیر قابل ارتجاع بطول ۳R که متصل بنقطه A از سطح کره است نگاه داشته شده است مثلنهای دیگر رشته بنقطه ثابت B بفاصله ۳R از صفحه بسته شده نقطه B و کره فوق صفحه هستند وضع تعادل کره کش رشته و عکس العمل صفحه مطلوب است - آیا با مفروضات همیشه تعادل برقرار است ؟

۱۱۱ هرم منتظمی مربع القاعده که قطر قاعده اش ۱۶ سانتیمتر و طول یاقهای جانبی آن ۱۷ سانتیمتر است مفروض میباشد ، هرم مزبور صلب متشابه الاجزاء و وزین میباشد ، بوسیله نقطه M وسط یال SA آویخته شده تعادلش پایدار است مقصود محاسبه زاویه ایست که یال SA با قائم ایجاد میکند

براس S وزنی مابویریم نسبت این وزن بوزن هرم چقدر باید باشد برای آنکه در حال تعادل یال SA افقی گردد بالاخره بجه فاصله از قاعده باید هرم را بوسیله صفحه بموازات قاعده قطع کرد برای آنکه اگر این قسمت از حجم را حذف کنیم نقطه تعلیق M ثابت مانده و وزنی که S وارد کرده بوزن حذف شود ولی یال SA افقی بماند

۱۱۲ نبدایره وزین متشابه الاجزائی در صفحه قائمی بوسیله نخ غیر قابل ارتجاع بجرم غیر قابل ملاحظه آویخته شده دو انتهای نخ بدو سر قطر نبدایره بسته شده و بدون اصطکک در حلقه ثابت C که ابعادش بینهایت کوچک است داخل گردیده و اوضاع مختلفه تعادل نبدایره را معین کنید - حالتی را که متناظر با تعادل پایداری است تعیین کنید

۱۱۳ مکعب وزینی متشابه الاجزاء با آزادی حول یکی از روش A که ثابت فرض شده دوران میکند بنقطه B راس مقابل A در یکی از وجوه مکعب فوقی برابر نصف وزن مکعب در امتداد افقیه مفروض وارد شده وضع تعادل مکعب را تعیین تعادل مخصوص زاویه AB را با افق تعیین نمایید

۱۱۴ جسم صلب متشابه الاجزاء وزینی بشکل دو مخروط دوار SBA و TAB است که در قاعده AB مشترک میباشد قطر AB مساوی ۲۳ است

اولا - ثابت کنید مرکز ثقل جسم بر مرکز چهار قوه مساوی و موازی منطبق است که چهار راس ذوارقه الاضلاع SBTا یعنی مقطع سطح مخروطی بواسطه صفحه مار ST مرور مینماید

ثانیا - نسبت بین ارتفاعات را چگونه باید اختیار کرد برای آنکه جسم وقتی بر صفحه افقی بوسیله سطح مخروط SAB یا TAB متکی است به حال تعادل باشد

۱۱۵ استوانه افق بشعاع R مفروض است بر آن میله صلب وزین AB را که متشابه الاجزاء و طول آن ۲l است قرار میدهند وزن میله برابر P واحد طول میباشد چه وسط میله را متکی بر سطح و در صفحه مقطع قائم استوانه افق قرار دهیم پس تعادل بدین خواهد بود بر یکی از دو انتهای میله مثلا A وزن q را مابویریم میدهیم فرض بر سطح استوانه گردش میکند و وضع تعادل A'B'C' در میاید مقصود تعیین

زاویه ایست که در اینوضع با افق تشکیل میدهد

۱۱۶ مثلث متشابه الاجزاء وزینی بوسیله رشته OA بنقطه ثابت O آویخته شده نقطه تعلیق O را بقسمی تعیین کنید که اگر آنرا بوسیله رشته به C مربوط کنیم رشته های OA و OC در امتداد قائم بوده و ضلع BC در وضع تعادل مثلث افقی باشد مقدار کشش دو رشته چقدر است

۱۱۷ قطاع مسدور متشابه الاجزاء وزین OAB در صفحه قائم V بنقطه O آویخته شده عقربه OI در امتداد منصف الزاویه AOB بر صفحه قطاع نصب است بر وسط قوس AB یعنی نقطه O' خط O'L را بموازات OA رسم میکنیم این خط در صفحه قائم ثابت و قطاع متحرک است بنقطه B وزن P را وارد میسازیم قطاع منحرف میشود و عقربه OI خط O'L را در نقطه M تلاقی مینماید مقصود تعیین رابطه ایست که بین O'M و وزن P موجود است اگر O'L مدرج باشد خطی برای توزین بکار میرود

۱۱۸ مثلث ABC از راس A آویخته شده بر دو راس دیگر وزنیهای P و Q وارد میگردد میل BC را نسبت با افق تعیین کنید

مثال عددی - مثلث متساوی الاضلاع است P برابر ۳۰ کیلوگرم و Q مساوی ۵۰۲۰۰ کیلوگرم -

۱۱۹ جسمی صلب و متشابه الاجزاء بشکل منشور مثلث القاعده میل است بجه نقطه از سطح منشوری را باید رشته آویخت تا انتهای جانبی منشور موازی با محور رشته باشد

۱۲۰ میله متشابه الاجزائی بوزن P و بدون l حول انتهای O متحرک است انتهای دیگر میله A بمنتهای نخ وصل است که از قرقه B با بعد غیر قابل ملاحظه میگردد قرقه بر قائم O و فوق آن بقاعده h از آن قرار دارد جرم رشته غیر قابل ملاحظه است وزن Q بمنتهای دیگر نخ آویخته است

اولا - در حالت تعادل میله مقدار زاویه x را که میله با قائم احداث مینماید تعیین کنید (بحث)

ثانیا - مقدار و امتداد عکس العمل نقطه O را تعیین نمایید بازا چه مقدار از Q عکس العمل مزبور برابر وزن میله است

ثالثا - مقدار و امتداد فشاری که بوسیله قرقه بر محورش وارد میگردد چقدر است

مثال عددی - $Q=4$, $P=8$, $l=5$, $h=7$ در سلسله M, S, K, F

۱۲۱ وزن P به نقطه A بمنتهای میله صلب بدون وزنی بطول ۲ آویخته شده جانب دیگر را به نقطه ثابت O متصل نموده اند بقسمیکه بتواند حول آن دوران نماید بنقطه A رشته قابل انعطافی بجرم غیر قابل ملاحظه بسته شده رشته از داخل قرقه عبور بینهایت کوچک عبور مینماید قرقه در صفحه افقی مار بر O واقع بوده و از آن بقاعده ۲r از دارد بمنتهای آزاد رشته وزن Q آویخته شده مقصود محاسبه زاویه ایست که

تبقه OA با افق در وضع تعادل خور ایجاد مینماید

۱۳۲ - میله وزین AB حول نقطه A متحرك است. آنرا بوسیله رشته قابل انعطافی که بر اثر ثقل آن بسته شده نگاهداشته اند، رشته مزبور از قرقره P (با ابعاد كوچك) واقع بر قائم A عبور مینماید بر رشته وزن P آویخته شده. فاصله Ap مساوی AG است وزن میله Q و طول رشته l است وزن آن غیر قابل ملاحظه میباشد. مقصود تعیین اوضاع تعادل دستگاه و تشخیص اوضاع تعادل پایدار یا ناپایدار است

۱۳۳ - میله OA به نقطه ثابت O متصل شده میله تحت اثر قوه P وارد بنقطه A است که از حیث کمیت و امتداد معین میباشد حلقه B میتواند در امتداد OA بدون اصطكاك لغزش نماید حلقه مزبور تحت اثر قوه مانند Q است که نیز از حیث کمیت و امتداد معین شده. اوضاع تعادل میله را تعیین نمائید

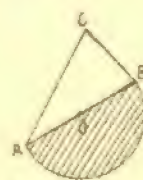
۱۳۴ - میله صلب CD طول l و وزن ۲P بوسیله دو رشته CA و DB بطولهای a و b بنقاط A و B آویخته شده نقاط ثابت A و B در يك صفحه افقی واقعند فاصله بین آنها برابر d است. چه وزنی باید یکی از دو انتهای میله آویخته تا در وضع تعادل میله افقی باشد

۱۳۵ - میله AB که متشابه الاجزاء و وزین است بوسیله یکی از دو انتهایش بر دیوار قائمی بدون اصطكاك متکی است. رشته غیر قابل ارتجاع و بدون جرم که بطول l است بنقطه مفروض C واقع بر میله را به نقطه ثابت O مربوط مینماید. اوضاع تعادل میله را تعیین نمائید

۱۳۶ - میله متشابه الاجزاء AB بوزن p و طول l حول انتهای خود A متحرك است بر دیگر آن رشته بدون جرمی وصل است رشته از قرقره كوچك C گذشته حامل وزن q است. فاصله نقطه C از صفحه افقی نقطه A برابر h و از قائم A مساوی k است. قوه q چقدر باید باشد تا میله در وضع مفروض بحال تعادل قرار گیرد

۱۳۷ - میله صلب غیر وزین OAB حول نقطه O متحرك است. میخواهیم با وجود وزن P که نقطه A میادیزیم میله را بوضع افقی نگاهداریم بنا بر آنکه بر انتهای B قوه Q که امتدادش از نقطه C واقع بر قائم A و فوق آن میگردد وارد شده باشد.

اولاً - OA و OB و AC مفروض اند مقدار قوه Q را حساب کنید



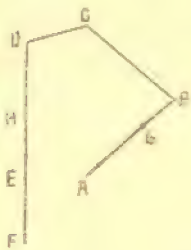
س ۹۰

ثانیاً - طول OB چقدر باید باشد تا Q كوچكترین مقدار ممكنه را دارا شود بنا بر آنکه P و OA و AC معین باشند

۱۳۸ - دو سر رشته های OA و OB را به نقطه ثابت O بسته اند جرم آنها صفر طول آنها بر ترتیب ۱ و ۲ است دو نقطه A و B را بنقاط A و B از میله متشابه الاجزاء وزینی وصل مینمائیم. وزن میله ۱۰ کیلوگرم و AB برابر ۲ است چه وزنی باید در نقطه A وارد ساخت تا در وضع تعادل میله افقی باشد

۱۳۹ - منتهای میله متشابه الاجزاء وزینی در نقطه B رشته بدون جرمی آویخته شده منتهای دیگر رشته بنقطه ثابت O بسته است. منتهای A از میله تحت اثر قوه افقی F قرار دارد. وضع تعادل دستگاه را تعیین نمائید. بازا چه مقدار از F زاویه OAB كوچكترین مقادیر ممكنه را دارا میگردد زوایای بین قائم و OB و AB چقدر است

۱۴۰ - میله AB بوزن P حول انتهای خود A متحرك است و از طرفی B بوسیله رشته بدون جرم بطول l نگاهداشته شده. این رشته از دو قرقره C و D با ابعاد كوچك عبور مینماید اولی بر قائم A واقع است رشته مزبور به نقطه H ختم میشود که بر آن در این نقطه زنجیر وزین قابل انعطافی بطول a وصل شده نقطه دیگر زنجیر بنقطه ثابت E که بر قائم D واقع است بسته شده. بفرض طول AG یعنی فاصله A از مرکز ثقل میله برابر h و وزن زنجیر HEF مساوی q واحد طول میباشد مقصود محاسبه طول CB در وضع تعادل زنجیر است آیا ممكن است مفروضات را طوری اختیار کرد که AB در جمیع اوضاع بحال تعادل باشد. کشش رشته را برابر وزن قطعه FH از زنجیر اختیار مینمائیم



س ۹۱

۱۴۱ - میله AB بدون وزن حول نقطه O متحرك است بدون سر آن رشته را که بوسیله قرقره C حامل وزن p است وصل مینمائیم مقصود تعیین وضع تعادل میله است

۱۴۲ - میله صلب AB میتواند حول پاشنه ثابتی در مرکز ثقل خود O که بر وسط آن واقع نیست دوران کند. a و b طولهای OA و OB میباشند. یکی از دو سر نخ قابل انعطاف و غیر قابل کششی را به نقطه A بسته اند رشته از حلقه كوچكی که در نقطه



س ۹۲

C ثابت شده عبور مینماید. همچنین مجدداً از حلقه دیگری که در نقطه A نصب شده عبور میکند و بعد مجدداً از حلقه اولی و سپس از حلقه دومی و پس علیها عبور مینماید بقیه که از حلقه های A و C $2n+1$ رشته بگذرد. آخرین رشته پس از عبور از حلقه C از حلقه ثابت دیگری که در نقطه B است عبور مینماید و پس از آن تحت اثر وزن P بحالت قائم میایستد. اصطكاك و وزن رشته و میله غیر قابل ملاحظه

است علاوه نقطه C بر قائم نقطه O و تحت این نقطه بفاصله c از آن قرار دارد

اولا - معلوم کنید که دستگاه مقروض بحال تعادل است

ثانیا - فرض میکنیم که در حال تعادل طولها $CA=x$ و $CB=y$ بقسمی باشند که $ka=y$ و $kb=x$ (عدد مقروضی است) مقادیر a و b را بقسمی تعیین کنید که شرط فوق برقرار شود، c و k و n اعداد مقروض اند

ثالثا - ثابت کنید که اگر عدد $2n+1$ ثابت بماند مقدار k اختیاری نیست حدودی را که k بین آنها تغییر مینماید معین نمایید

۱۳۳ - میله وزین و متشابه الاجزاء OA طول a حول نقطه ثابت O متحرک است بر نقطه A منتهای میله دیگر AB معادل با A مفصل شده منتهای B میله اخیر بوسیله رشته بدون جرم و بطول a بنقطه O وصل است دستگاه بحال تعادل است

اولا - ظل زوایائی که اضلاع مثلث OAB با قائم ایجاد مینماید تعیین کنید

ثانیا - کشش رشته را بنا بر آنکه هر يك از میلهها بوزن ۱۰ کیلوگرم باشد معین سازید

۱۳۴ - دو تیفه متساوی AB و AC را در صفحه قائم قرار داده ایم بقسمی که BC متکی

بر صفحه افق است تیفه AB در نقطه B با زمین مفصل

است و دو تیفه در نقطه A بیکدیگر وصل میباشد، شاخه

AC میتواند بر زمین بلغزد، بر نقطه D وسط AB در

صفحه قائم ABC قوه p را عمود بر AB وارد مینمائیم

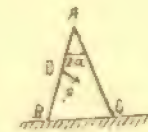
بطریقیکه دستگاه بر صفحه افق متکی شود، وزن تیفه ها

و اصطکاک نقاط B و A غیر قابل ملاحظه است اما تیفه

AC با زمین دارای اصطکاک است

اولا - بین چه حدودی باید زاویه α واقع باشد تا تعادل

دستگاه ممکن گردد



س ۹۳

ثانیا - برای یکی از حالات تعادل مقدار فشار بر زمین و مفصل های A و B را حساب

کند مقدار ماکزیموم یا مینیموم هر يك از فشارها را بازاء تغییرات α تعیین نماید

۱۳۵ - نردبانی مضاعف AOA' با شاخه های مساوی AO و OA' بر زمین افقی AA'

قرار دارد دو شاخه مزبور بواسطه میله BB' بیکدیگر وصل شده اند تا مانع از لغزش

نردبان بر خاک باشد وزن مجموع نردبان P و هر شاخه آن بوزن π است که از قاعده

بر تکیه هر يك از شاخه ها وارد شده وزن BB' برابر π است بطریقی که $\pi + \pi = P$

بر شاخه OA در نقطه M وزن P وارد شده طول OA برابر a و جاولهای OB و OB'

مساوی b است، α نصف زاویه راس دو شاخه نردبان میباشد μ ضریب اصطکاک

نردبان بر زمین است (اصطکاک مفصل O صفر است)

اولا - چه شرطی باید مقرر باشد تا BB' دارای هیچ کششی شود

ثانیا - وقتی کشش موجود است مقدار آن و مقدار فشاری که بر O وارد میباشد

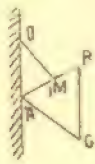
حساب کنید

۱۳۶ - اوضاع نهال میله وزینی را تعیین کنید که يك انتهای آن ثابت بوده و برکناره

قوفانی دیواری قائم که افقی فرض شده متکی است بدوا فرض مینمائیم که میله بدون

اصطکاک بر دیوار بلغزد بعد اصطکاک را منظور میداریم اصطکاک انتهای ثابت

میله غیر قابل ملاحظه است



۱۳۷ - مثلث متساوی الاضلاع وزین ABC ضلع a در صفحه

قائم قرار دارد، بر نقطه M وسط AB رشته OM بطول l بسته

شده انتهای دیگر ریسمان نقطه ثابت O که بر دیواری قائم قرار

دارد نصب است کشش رشته بصورت قوه مقروضی که درجهت MO

ممتد است میباشد راس A بدون اصطکاک بر دیوار بلغزد اوضاع

تعادل مثلث را تعیین نمایید

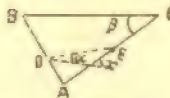
۱۳۸ - ورقه متشابه الاجزائی بشکل مثلث قائم الزاویه بدون س ۹۴

اصطکاک بوسیله اضلاع AB و AC از زاویه قائمه بر دو میخ افقی D و E قرار دارد

اگر میخ ها را استوانه شکل فرض نمائیم ثابت کنید برای

موجود شدن يك وضع تعادل از مثلث لازم است میخها

موازی باشند



فرض آنکه فاصله DE میخها برابر l و l باشد مقصود

محاسبه میل ضلع AC نسبت باقی است در وضع تعادل

مثلث بنا بر آنکه میل DE نسبت باقی و طول وتر و مقدار

زوایای مثلث معین باشند

۱۳۹ - تیفه مثلث شکل CBA که در زاویه A قائمه است بواسطه اضلاع زاویه قائمه

بر دو قرص ثابت به ضخامت تیفه متکی است تیفه و قرصها در يك صفحه قائم قرار دارند

مراکز O و O' بر يك افقیه واقع میباشد، اگر فرض کنیم در وضع تعادل قائم مرکز ثقل

سطح ABC بر راس A مرور نماید و علاوه این راس بر خط

البرترین دوائر واقع میباشد مقصود این است که بحسب اضلاع



$AC=l$ و $AB=c$ ، α اولاً نسبت اشعه دوائر را تعیین نماید

ثانیاً نسبت بین قطعات AO و AO' را معلوم کنید ثالثاً نسبت

فشارهایی که بر دو قرص وارد مینماید معین سازید رابعاً b برابر

س ۹۶

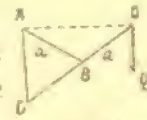
۶. ضریب μ مساوی μ نسبت به μ برابر ۲۷ سانتیمتر و ضخامت

تیفه مساوی ۵ سانتیمتر میباشد و وزن مخصوص آن ۷ است طولهای OA و OA' و μ و

فاصله MN نقاط تماس و وزن تیفه و بالاخره فشار بر قرصها را حساب کنید

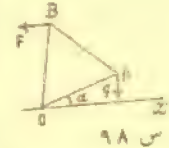
۱۴۰. مثلث متساوی الاضلاع ABC بضلع a و وزن P میتواند آزادی حول راس ثابت A دوران نماید رشته بجرم غیر قابل ملاحظه براس A ثابت بوده و از قرقره D که ابعادش غیر قابل ملاحظه است عبور مینماید نخ بواسطه وزن Q کشیده میشود. D در صفحه افقی A و فاصله AD از این نقطه قرار دارد تعادل برقرار بوده و $AB=BD$ مقصود محاسبه وزن Q و عکس العمل نقطه ثابت A بر مثلث است. مثال عددی $P=2kg$ و $a=0.33$ متر و $b=0.28$ متر.

۱۴۱. مثلث متشابه الاجزاء و متساوی الاضلاع OAB بوزن P در صفحه قائمی حول نقطه O متحرک است میدانیم قوه مانند q از فوق متحرک بر نقطه A وارد میشود.



اولاً. مقصود تعیین قوه F وارد بر اس B است بقسمی که تعادل برقرار گشته و ضمایا زاویه OA با محور افقی Ox برابر مقدار معین α شود.

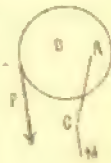
ثانیاً. بنابر آنکه q ثابت بماند تغییرات F را وقتی α بین 0 و 2π تغییر مینماید تعیین کند.



۱۴۲. مکعب متشابه الاجزاء بوزن P و یال $2a$ بدون اصطکاک بواسطه یکی از یالهای افقی AB بر دیوار قائمی متکی است این مکعب بواسطه رشته بطول l که سرگز O یکی از وجوه مار بر AB و بدیوار قائم بسته است نگاهداشته شده مقصود تعیین وضع تعادل مکعب است. کش رشته و عکس العمل دیوار را حساب کنید.

۱۴۳. بر دایره قائمی شعاع R که حول مرکزش میتواند دوران نماید رشته پیچیده شده که بدان وزن P را آویخته اند بر نقطه A از سطح دایره که فاصله r از مرکز O است رشته ثابتی بسته شده که از حلقه C عبور مینماید، حلقه C بر قائم O و از این نقطه فاصله a قرار دارد. CM را با قوه F میکشیم مقصود محاسبه زاویه x است که بین شعاع OA و قائم OC در حال تعادل تشکیل میشود (بعث).

۱۴۴. نیمدایره متشابه الاجزاء و وزنی محدود بقطر AB حول A متحرک است بر نقطه B رشته که بر نقطه ثابت C بسته است متصل میباشد. $AB=2R$ و $AC=\frac{5R}{4}$ و $BC=\frac{3R}{4}$ و وزن P نیمدایره



مقروض اند. مقصود تعیین عکس العمل نقطه A و کش رشته است.



اغلاط ذیل را تصحیح نمائید.

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۸	۱	انچه	منچه
۲۱	۲۳	منچه	انچه
۲۳	۱	میکنند	کنند
۲۳	۱۴	OL و OL'	OL و OL'
۴۳	۴	$m - mg$	$-mg$
۴۴	۷	gt	$-gt$
۴۵	۴	Z	z
۴۶	۱	$\cos a$	$\cos^2 a$
۴۶	۴	$y,$	$z,$
۴۷	۱۳	$g_1^2 x$	gx_1^2
۴۷	۱۴	tga	$x_1 tga$
۴۸	۳	h	g
۴۸	۱۱	حرکت مادی متکی	حرکت نقطه مادی که متکی
۴۹	۱۸	$\sin o$	\sin
۵۰	۲۰	$a \varphi$	$a - \varphi$
۵۱	۲۳	HM_1	OM_1
۵۹	۲۲	$Y_1^2 Z_1^2$	$Y_1^2 + Z_1^2$
۸۰	۱۲	p_1	p_2



س ۹۰



س ۹۰

فهرست مندرجات

نمره	صفحه	موضوع	نمره	صفحه	موضوع
۱	۱	معرفة القوى وعلم تعادل قوي	۲۳	۲۵	تمرينات
۲	۲	نقطه مادی			فصل دوم
۳	۳	جرم			استاتيک نقطه
۴	۵	قوة	۲۴	۲۶	تعادل نقطه مادی
۵	۶	جبر	۲۵	۲۷	عکس العمل منحنی - فشار
۶	۶	شرایط اولیه			نقطه بر منحنی
۷	۷	تساوی عمل و عکس العمل	۲۶	۲۸	قوانین تجربی اصطکاک و لغزش
۸	۸	عدم بستگی آثار قوی	۲۷	۳۰	تعادل نقطه متکی بر منحنی ثابت
۹	۸	مکانیک ارضی	۲۸	۳۱	" "
۱۰	۹	تعادل	۲۹	۳۴	عکس العمل سطح - فشار
۱۱	۹	نقطه آزاد و نقطه غیر آزاد			نقطه بر سطح
۱۲	۱۰	تعادل نقطه مادی آزاد	۳۰	۳۴	تعادل نقطه واقعه بر سطح
۱۳	۱۱	استاتیکی نقطه غیر آزاد	۳۱	۳۵	" "
۱۴	۱۳	بعضی نتایج اصول موضوعه	۳۲	۳۶	آثار و اسباب اصطکاک
۱۵	۱۵	قوای داخلی، قوای خارجی			تمرينات
۱۶	۱۷	قضیه اصلی			فصل سوم
۱۷	۱۷	شش شرط لازم تعادل			دینامیک نقطه
۱۸	۱۷	مورد استعمال، کشش نخ	۳۳	۴۲	اثر قوة
۱۹	۱۸	وزن جسم	۳۴	۴۲	حرکت موافق امتداد قائم
۲۰	۱۹	جرم جسم	۳۵	۴۴	حرکت سهمی شکل
۲۰	۲۰	تعیین مقدار جسم بوسیله ترازو	۳۶	۴۸	حرکت مادی متکی بر منحنی
۲۱	۲۲	سنجش مستقیم مقدار قوی	۳۷	۴۹	حرکت نقطه وزین بر صفحه
۲۲	۲۳	میزان القوة			تمرينات
۲۳	۲۴	آحاد اصلی معرفة القوى و علم تعادل قوی			فصل چهارم
			۳۸	۵۹	موضوع کار

نمره	صفحه	موضوع	نمره	صفحه	موضوع
۳۹	۵۹	تعریف	۶۶	۹۰	مورد استعمال
۴۰	۶۰	اولا کار قوای ثابت	۶۷	۹۲	مرکز ثقل حجم
۴۱	۶۱	کار ثابت در تغییر مکان	۶۸	۹۳	مرکز ثقل حجم منشور
۴۲	۶۲	کار قوة ثابت	۶۹	۹۴	مرکز ثقل حجم هرم
۴۳	۶۳	ثابت در حالتیکه قوی متغیر باشد	۹۶		تمرينات
۴۴	۶۴	عبارت کار جزئی			فصل ششم
۴۵	۶۴	محاسبه کار			استاتیکی اجسام غیر آزاد
۴۶	۶۷	آحاد کار			
۴۷	۶۷	تعریف	۷۰	۹۸	قوای مستقیم و عکس العملها
۴۸	۶۸	فرس ویو و کار	۷۱	۹۹	بعضی ارتباط های ساده
۴۹	۶۹	قضیه فرس ویو	۷۲	۱۰۱	اصل موضوع استاتیکی جسم صلب
۵۰	۶۹	مورد استعمال	۷۳	۱۰۲	جسمی که دارای نقطه ثابت است
	۷۰	تمرينات	۷۴	۱۰۴	اهرم
		فصل پنجم	۷۵	۱۰۵	انواع اهرم
		استاتیکی اجسام صلب آزاد	۷۶	۱۰۵	قضیه
۵۱	۷۳	یکدسته نقاط مادی بحال تعادل	۷۷	۱۰۷	قرقره و چرخ چاه
۵۲	۷۴	اجسام لایتنیر	۷۸	۱۰۸	فشار بر محور
۵۳	۷۵	اجسام آزاد	۷۹	۱۰۹	قرقره متحرک
۵۴	۷۶	اصل کلی در استاتیکی	۸۰	۱۱۰	ترکیب يك قرقره ثابت
۵۵	۷۷	تبدیل قوای وارده	۸۱	۱۱۰	قرقره مرکب
۵۶	۷۸	شش شرط لازم برای تعادل	۸۲	۱۱۲	چرخ چاه معمولی
۵۷	۷۹	مرکز ثقل	۸۳	۱۱۳	چرخ چاه معدنی
۵۸	۸۰	مختصات مرکز ثقل	۸۴	۱۱۴	کریک Cric
۵۹	۸۱	مرکز ثقل خط	۸۵	۱۱۶	قضیه
۶۰	۸۲	قضیه اول کولدن	۸۶	۱۱۷	پایداری
۶۱	۸۵	مرکز ثقل سطح مستوی	۸۷	۱۱۸	قضیه
۶۲	۸۶	مرکز ثقل سطح مثلث	۸۸	۱۱۹	کثیر الاضلاع انکاء
۶۳	۸۶	" " چهار ضلعی	۸۹	۱۱۹	شرایط تعادل
۶۴	۸۷	" " " " مجرب	۹۰	۱۲۰	تعادل جسم وزین
۶۵	۸۹	قضیه دوم کولدن			

نمره	صفحه	موضوع	نمره	صفحه	موضوع
۹۱	۱۲۲	سه رشته در نقطه C	۹۴	۱۲۷	وقتی دسته اجسام تحت اثر
۹۲	۱۲۳	میل و وزن و متشابه الاجزاء	۹۵	۱۳۰	تعادل نزدیکان
۹۳	۱۲۶	ورقه مثلثی شکل ABC		۱۳۱	تمرینات



خاتمه

کتابی که از تألیفات مؤلف این کتاب از طبع خارج شده

هندسه رقومی مخصوص کلاس پنجم متوسطه

مکانیک مخصوص کلاس پنجم متوسطه

هندسه تریسمی مخصوص کلاس ششم

کتابی که تحت طبع است

حساب استدلالی مخصوص کلاس ششم

حل المسائل هندسه رقومی و هندسه تریسمی مخصوص کلاسهای ۵ و ۶ متوسطه

هندسه و مخروطات مخصوص کلاس ششم متوسطه

اطلاع

در کتابخانه مرکزی انواع اقسام کتب علمی و ادبی قدیمه و جدیده

نسخ خطی خرید و فروش میشود علاوه کتب کلاسیک بالسه خارجی

نیز موجود و قیمت مناسب به مشتریان تقدیم میشود.

